概率论与数理统计
第一章 概率论基本概念

李自达

17841138287

课程内容

第一章　概率论基本概念

第二章　随机变量及其分布

第三章　多维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

第五章　大数定律及中心极限定理

第六章　样本及抽样分布

第七章　参数估计

概率论的诞生

1654年,一个名叫梅累的骑士就“两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 *c* 局便算赢家, 若在一赌徒胜 *a* 局 (*a*<*c*),另一赌徒胜*b*局(*b*<*c*)时便终止赌博, 问应如何分赌本” 为题求教于帕斯卡, 帕斯卡与费马通信讨论这一问题, 于1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念

——数学期望.

概率论的诞生

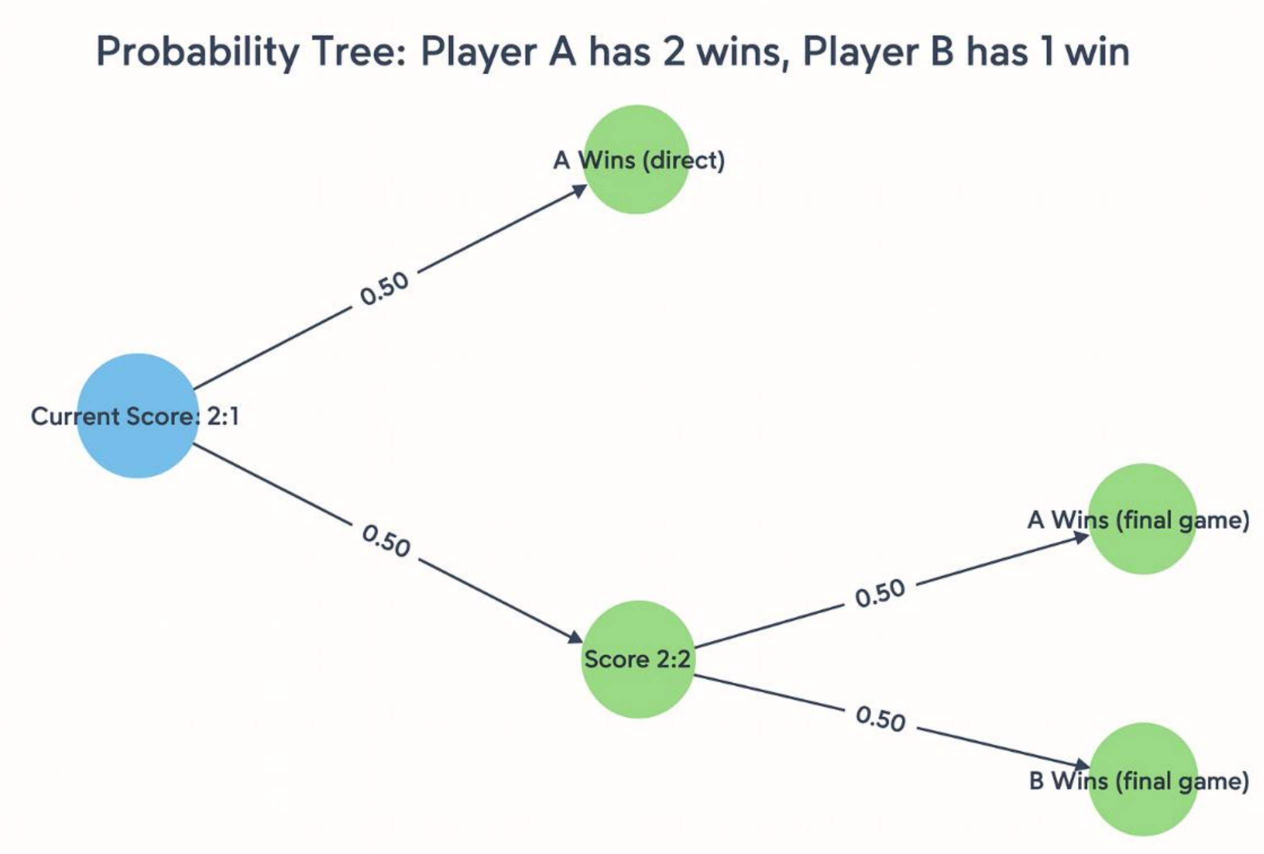
布莱斯 帕斯卡　　　　　　　　皮耶·德·费玛

这是惊人的，起源于赌博的概率理论，竟会成为人类知识的最重要的对象。

—拉普拉斯

游戏规则

- 两人约定：**先赢 3 局者获胜**（$c = 3$）。
- 现在的局面：
  - 甲已经赢了 **2 局**（$a = 2$）。
  - 乙赢了 **1 局**（$b = 1$）。
- 这时因为某种原因，比赛要提前中止，那么：赌注如何公平分？



📊 甲的总胜率

= 情况1 + 情况2

= 1/2 + 1/4 = **3/4。**

所以:

- 甲获胜概率 = 75%
- 乙获胜概率 = 25%

第一章　概率论基本概念

确定性现象 在一定条件下必然发生的现象

1. 太阳东升西落
2. 水往低处流

。。。

随机现象

在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象。

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象。

实例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.

结果有可能出现正面也可能出现反面.

实例2 投掷飞镖的得分数

实例3 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

结果有可能为:

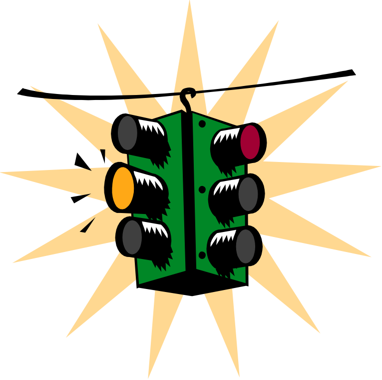
1, 2, 3,
4, 5 或 6.

实例4 从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

其结果可能为:

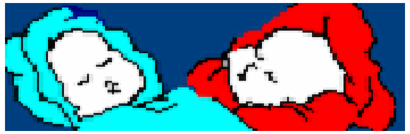
正品 、次品.

实例5 过马路交叉口时,可能遇上各种颜色的交通指挥灯.



实例6 出生的婴儿的性别

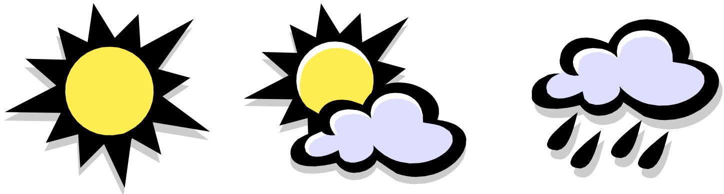
可能是**男**,也可能是**女**.



实例7 深圳明天的天气情况

可能是**晴**，也可能是**多云**

或**雨**.



随机现象的特征 **条件不能完全决定结果**

概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科.

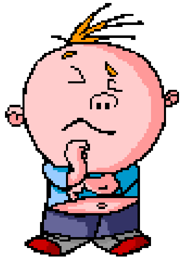
说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.



问题 什么是随机试验?

§1 随机试验

定义

在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

1. 可以在相同的条件下重复地进行
2. 每次试验的可能结果不止一个，并能事先明确试验的所有可能结果
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现

说明

1. 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.

2. 随机试验通常用 E 来表示.

实例 “抛掷一枚硬币,观察字面、花面出现的情况”.

分析

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

字面、花面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验.

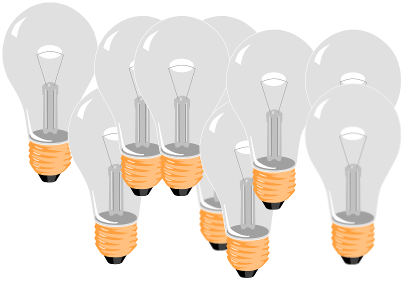
1. 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

2. 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.

3. 记录某公共汽车站在上午某时刻的等车人数.

4. 考察深圳 3月份的平均气温.

5. 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



§2 样本空间　随机事件

① 样本空间，样本点

② 随机事件的概念

③ 事件的关系及事件的运算

④ 小结

① 样本空间　样本点

问题　随机试验的结果?

定义　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合**称为 E 的样本空间, 记为 S.**

样本空间的元素 , 即试验E 的每一个结果, **称为样本点.**

实例1　抛掷一枚硬币,观察字面,花面出现的情况.

$H \rightarrow$ 字面朝上

$T \rightarrow$ 花面朝上

$$S_1 = \{H, T\}.$$

实例2　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

实例3　从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记　$N \to$ 正品,　$D \to$ 次品.

则 $S_3 = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD\}.$

实例4 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

实例5 考察深圳 3月份的平均气温.

$$S_5 = \{t \mid T_1 < t < T_2\}.$$

其中 t 为平均温度.

实例6 从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.

$$S_6 = \{t \mid t \geq 0\}.$$

其中 t 为灯泡的寿命 .

实例7 记录某城市120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

$$S_7 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

课堂练习

写出下列随机试验的样本空间.

1. 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子之和.
2. 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.

答案

1. $S = \{3, 4, 5, \cdots, 18\}$.

2. $S = \{10, 11, 12, \cdots\}$.

说明　1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.

2. 同一试验, 若试验目的不同,则对应的样本空间也不同.

例如　对于同一试验: "将一枚硬币抛掷三次".

若观察正面 *H*、反面 *T* 出现的情况,则样本空间为

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}.$$

若观察出现正面的次数, 则样本空间为

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

说明　3. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此，一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如　只包含两个样本点的样本空间

$$S = \{H, T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型，也可以作为产品检验中合格与不合格的模型，又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.

所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

② 随机事件的概念

1. 基本概念

随机事件 随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件, 简称事件.

实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子“出现1点”, “出现2点”, ... ,“出现6点”, “点数不大于4”, “点数为偶数” 等都为随机事件.

基本事件 由一个样本点组成的单点集.

实例 “出现1点”, “出现2点”, …, “出现6点”.

必然事件 随机试验中必然会出现的结果.

实例 上述试验中 “点数不大于6” 就是必然事件.

不可能事件 随机试验中不可能出现的结果.

实例 上述试验中 “点数大于6” 就是不可能事件.

必然事件的对立面是不可能事件,不可能事件的对立面是必然事件,它们互称为对立事件.

2. 几点说明

(1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示事件

例如　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设　A = “点数不大于4”,

B = “点数为奇数”　等等.

(2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

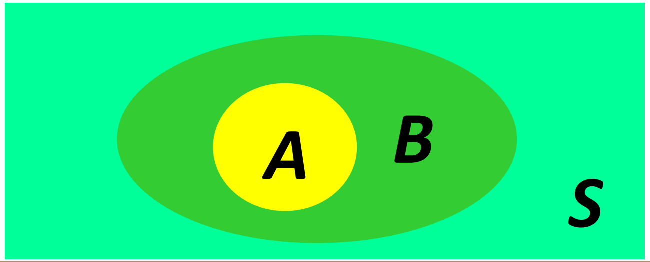
$$
\text{随机事件}\begin{cases}\text{基本事件}\\ \text{复合事件}\\ \left.\begin{array}{l}\text{必然事件}\\ \text{不可能事件}\end{array}\right\}\text{互为对立事件}\end{cases}
$$

③ 随机事件间的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 S, 而 A, B, A_k $(k = 1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1. 包含关系 若事件 A 出现, 必然导致 B 出现 , 则称事件 B 包含事件 A,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

实例 "长度不合格" 必然导致 "产品不合格" 所以"产品不合格" 包含 "长度不合格".



图示 B 包含 A.

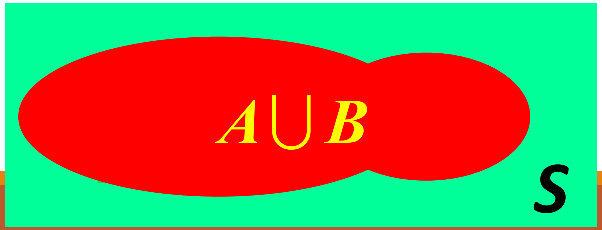
2. A等于B 若事件A 包含事件B， 而且事件B 包含事件A，则称事件A 与事件B 相等，记作 A=B.

3. 事件 A 与 B 的并(和事件)

事件 $A \cup B = \{x | x \in A$ 或 $x \in B\}$称为事件 A 与事件B的**和事件**.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此 “产品不合格” 是 “长度不合格” 与 “直径不合格” 的并.

图示事件 A 与 B 的并.



推广　称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

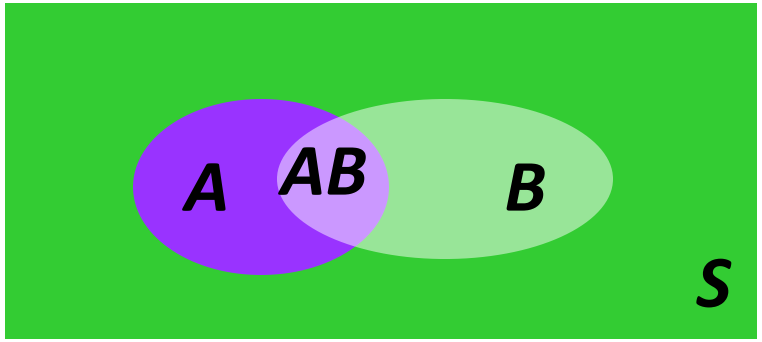
4. 事件 *A* 与 *B* 的交 (积事件)

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件.

积事件也可记作　$A \cdot B$ 或 AB.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此"产品合格"是"长度合格"与"直径合格"的交或积事件.

图示事件*A*与*B*的积事件.



推广　称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup S = S, \quad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap S = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

1. 可列性的定义

在数学里，一个集合如果能与自然数集

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

建立 **一一对应**，就称它是 **可列的（countable）**。

- **有限集**：显然可以列出来（例如 $\{a, b, c\}$ 可以对应 $\{1, 2, 3\}$）
- **无限集**：如果也能"排成队"，就叫 **可数无限**。

所以，"可列"包含两种情况：

1. **有限可列**
2. **可数无限可列**

2. 可列无限的直观例子

- **自然数集** $\{1, 2, 3, \dots\}$：本身就是可数无限。
- **偶数集** $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$：可以和自然数一一对应（比如 $n \mapsto 2n$）。
- **整数集** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$：可以"蛇形排列"，比如：

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

这样也能一一对应自然数。

3. 不可列（不可数）的集合

- 经典例子：**实数集** $\mathbb{R}$。
- 康托尔证明：$[0, 1]$ 区间里的实数无法和自然数建立一一对应关系（用"对角线法"证明）。
- 所以实数集是 **不可数无限** 的。

这也是为什么概率论里我们只要求"可列可加性"，而不要求"不可数可加性"——否则整个体系在不可数无穷的场景下会崩溃。

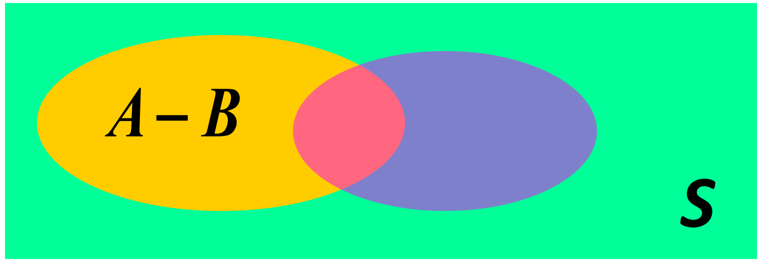
5. 事件 A 与 B 的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生所组成的事件称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

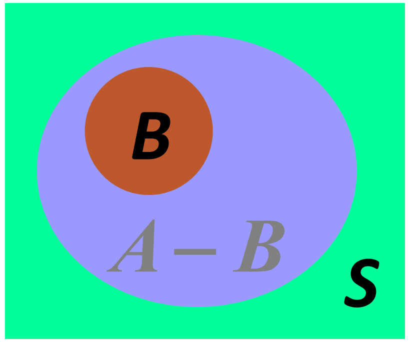
实例 “长度合格但直径不合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的差.

图示 A 与 B 的差.

$B \not\subset A$



$B \subset A$

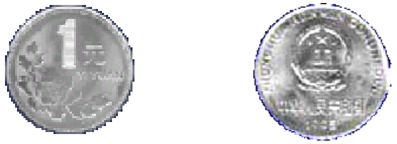


6. 事件 A 与 B 互不相容 (互斥)

若事件 A 的发生必然导致事件 B 不发生, B 发生也必然导致 A不发生， A, B不能同时发生则称事件 A与B互不相容, 即

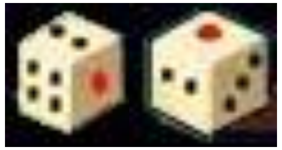
$$A \cap B = AB = \varnothing.$$

实例 抛掷一枚硬币, "出现花面" 与 "出现字面" 是互不相容的两个事件.

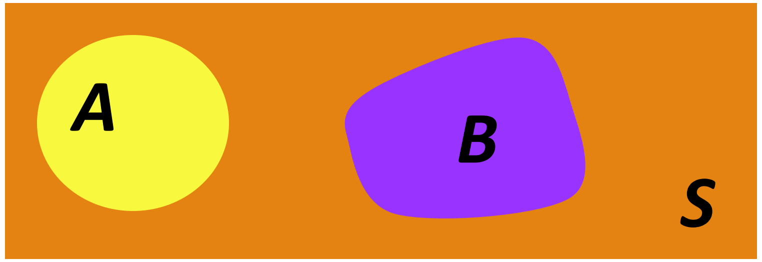


实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

"骰子出现1点" $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ "骰子出现2点"



图示 A 与 B 互斥.

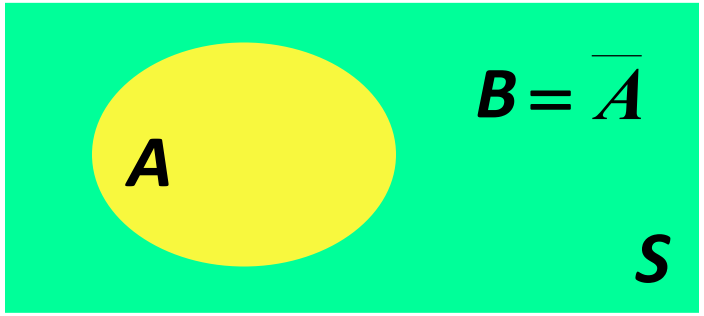


7. 事件 A 的对立事件

设 A 表示“事件 A 出现”, 则“事件 A 不出现”称为事件 A 的**对立事件或逆事件**. 记作 $\overline{A}$.

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

图示 A 与 B 的对立.



若 A 与 B 互逆,则有 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$.

对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥

$$AB=\varnothing$$

A、B 对立

$$A\cup B=S \text{ 且 } AB=\varnothing$$

互　斥 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 对　立

事件间的运算规律 设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, \ AB = BA.$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(AB)C = A(BC).$

(3) 分配律

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$

(4)德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

例1 设A,B,C表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C表示出来.

(1) A出现, B, C不出现;

(2) A, B都出现, C不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

(7) 不多于两个事件出现;

(8) 三个事件至少有两个出现;

(9) *A*, *B* 至少有一个出现, *C* 不出现;

(10) *A*, *B*, *C* 中恰好有两个出现.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$; (2) $AB\overline{C}$; (3) ABC;

(4) $A \cup B \cup C$; (5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}$

$+A\bar{B}C+\bar{A}BC$,

或 $\overline{ABC}$;

(8) $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$;

(9) $(A\cup B)\bar{C}$;

(10) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$.

例2 设一个工人生产了四个零件, A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 $(i=1,2,3,4)$, 试用 A_i 表示下列各事件：

(1)没有一个是次品; (2)至少有一个是次品;

(3)只有一个是次品; (4)至少有三个不是次品;

(5)恰好有三个是次品; (6)至多有一个是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$;

(2) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$

$+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}$

$+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}$

$+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$,

或 $\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$;

(4) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$

$+A_1A_2A_3A_4$;

$$(5)\quad \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}$$

$$+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4};$$

$$(6)\quad \overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$$

$$+A_1A_2A_3A_4.$$

④ 小结

1. 随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

$$\text{随机事件}\begin{cases}\text{基本事件}\\ \text{复合事件}\\ \text{必然事件}\\ \text{不可能事件}\end{cases}$$

2. 概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A出现必然导致B出现	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等

$A \cup B$	事件A与事件B的和	集合A与集合B的并集
AB	事件A与事件B的积事件	集合A与集合B的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB = \varnothing$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素

第三节　　频率与概率

一、频率的定义与性质

二、概率的定义与性质

三、小结

一、频率的定义与性质

1. 定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数.比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$.

2. 性质

设 *A* 是随机试验 *E* 的任一事件, 则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f(S)=1,\ \ f(\varnothing)=0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	249	0.498
3	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	[illegible]	[illegible]	.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	26	[illegible]
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

随 n 的增大, 频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

从上述数据可得

(1) 频率有随机波动性，即对于同样的 n，所得的 f 不一定相同;

(2) 抛硬币次数 n 较小时, 频率 f 的随机波动幅度较大，但随 n 的增大，频率 f 呈现出稳定性。即当 n 逐渐增大时频率 f 总是在 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于 0.5.

实验者	n	n_H	f
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
$K\cdot$皮尔逊	12000	6019	0.5016
$K\cdot$皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n\text{的增大}} 1/2$$

重要结论

频率当 n 较小时波动幅度比较大，当 n 逐渐增大时， 频率趋于稳定值，这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现可能性的大小.

“频率稳定性”即通常说的统计规律性.

请同学们思考.

医生在检查完病人的时候摇摇头：“你的病很重，在十个得这种病的人中只有一个能救活.”当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说：“但你是幸运的．因为你找到了我，我已经看过九个病人了，他们都死于此病。”

医生的说法对吗?

二、概率的定义与性质

1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展.

概率公理化定义之前对概率的定义

1. 概率的古典定义

概率是一件事件发生的可能性大小的数字衡量。事件A在n次试验中发生了m次，则事件A的概率为P(A)=m/n

2. 频率 试验得到的结果

3. 概率的频率定义：

大量试验中，随着试验次数的增加，频率总围绕着某个固定的数值波动，“固定的数值”称为概率。

1. 概率的定义

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间.对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) **非负性:** 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geq 0$;

(2) **规范性:** 对于必然事件 S,有 $P(S) = 1$;

(3) **可列可加性:** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i \neq j$, $A_i A_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, \cdots$,则有

$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}_{\text{概率的可列可加性}}$$

2. 性质

(1) $P(\varnothing)=0.$

证明 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots),$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j.$

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

$$\left.\begin{aligned}&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)\\&P(\varnothing)\geq 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow P(\varnothing)=0.$$

(2) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

概率的有限可加性

证明　令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing,$

$$\Rightarrow A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots.$$

由概率的可列可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0$$

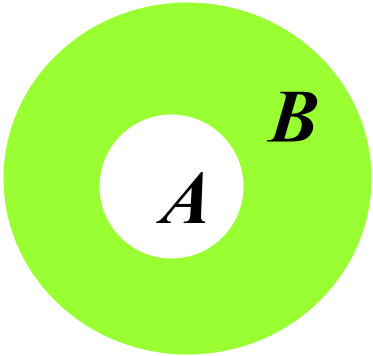
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

(3) 设 A,B 为两个事件,且 $A\subset B$,则

$$P(A)\le P(B),\quad P(B-A)=P(B)-P(A).$$

证明　因为　$A\subset B$,

所以　$B=A\cup(B-A)$.



又　$(B-A)\cap A=\varnothing$,

得　$P(B)=P(A)+P(B-A)$.

于是　$\boxed{P(B-A)=P(B)-P(A).}$

又因　$P(B-A)\ge 0$,　故 $P(A)\le P(B)$.

(4) 对于任一事件 A, $P(A) \leq 1$.

证明 $A \subset S \Rightarrow P(A) \leq P(S) = 1$,

故 $P(A) \leq 1$.

(5) 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件, 则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因为 $A \cup \overline{A} = S$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $P(S) = 1$,

所以 $1 = P(S) = P(A \cup \overline{A})$

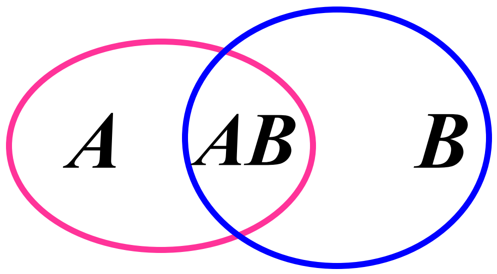
$$= P(A) + P(\overline{A}).$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

(6) (加法公式) 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明　由图可得



$$A \cup B = A + (B - AB),$$

且 $A \cap (B - AB) = \varnothing,$

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$

又由性质 3 得

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB),$$

因此得　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

推广 **三个事件和的情况**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3)$$

$$- P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

***n* 个事件和的情况**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j)$$

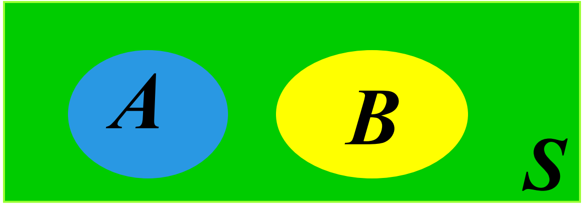
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n).$$

例1 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值.

(1) A与B互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1)由图示得 $P(B\overline{A})=P(B)$,

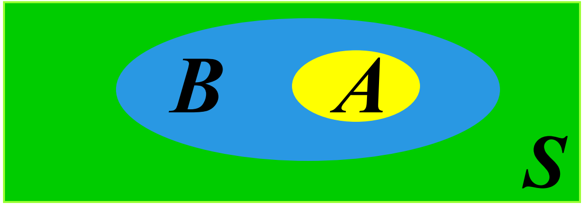
故 $P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$.



(2)由图示得

$P(B\overline{A})=P(B)-P(A)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

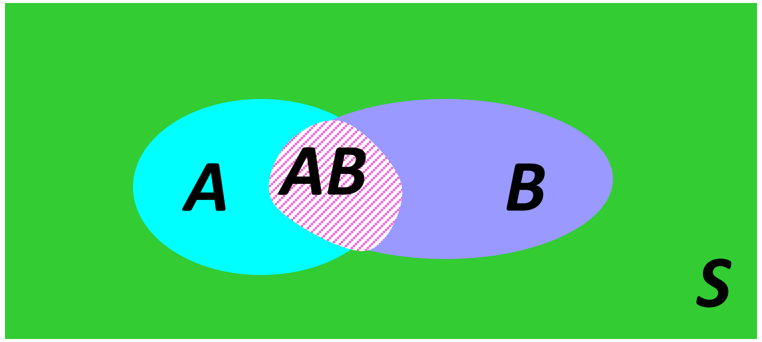


(3) 由图示得 $A\cup B = A\cup B\overline{A}$, 且 $A\cap B\overline{A}=\varnothing$,

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$P(A\cup A\overline{B})=P(A)+P(B\overline{A})$,

因而 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$.



三、小结

1. 频率 (波动) $\xrightarrow{n \to \infty}$ 概率(稳定).

2. 概率的主要性质

$(1)\ 0 \le P(A) \le 1,\ \ P(S) = 1,\ P(\varnothing) = 0;$

$(2)\ \ P(\overline{A}) = 1 - P(A);$

$(3)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$

(4) 设 A, B 为两个事件,且 $A \supset B$,则

$P(A) \ge P(B), \quad P(A - B) = P(A) - P(B).$

要点

事件间关系&运算规律

设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, \ AB = BA.$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(AB)C = A(BC).$

(3) 分配律

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$

(4)德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

要点

会表示随机事件

频率

概率

概率性质

第四节 等可能概型(古典概型)

一、等可能概型

二、典型例题

三、几何概率

四、小结

一、等可能概型(古典概型)

1. 定义

(1)　试验的样本空间只包含有限个元素；

(2)　试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型或古典概型．

2. 古典概型中事件概率的计算公式

设试验 E 的样本空间由n 个基本事件构成， A 为 E 的任意一个事件，且包含 m 个基本事件，则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{\mathrm{k}}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件的个数}}{\mathrm{S}\text{中基本事件的总数}}.$$

3. 古典概型的基本模型:摸球模型

(1) 无放回地摸球

问题1 设袋中有4 只白球和 2只黑球, 现从袋中无放回地摸出2只球,求这2只球都是白球的概率.

解 设 $A=\{$摸得 2 只球都是白球$\}$,

基本事件总数为 $\binom{6}{2}$,

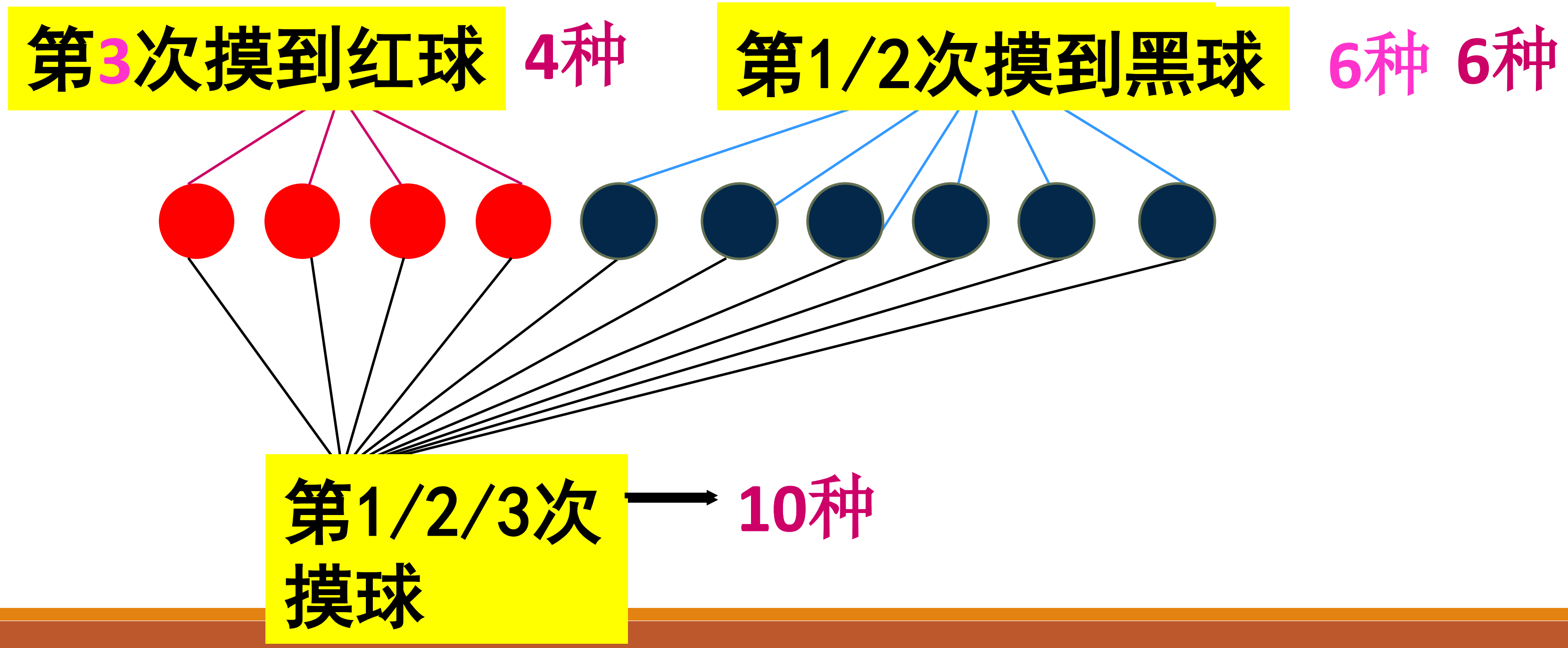
A 所包含基本事件的个数为 $\binom{4}{2}$,

故 $P(A)=\binom{4}{2}\Big/\binom{6}{2}=\dfrac{2}{5}.$

(2) 有放回地摸球

问题2 设袋中有4只红球和6只黑球,现从袋中有放回地摸球3次,求前2次摸到黑球、第3次摸到红球的概率.

解 设 $A=\{$前2次摸到黑球,第3次摸到红球$\}$



基本事件总数为 $10\times10\times10=10^3$,

A 所包含基本事件的个数为 $6\times6\times4$,

故 $P(A)=\dfrac{6\times6\times4}{10^3}=0.144.$

课堂练习

1° **电话号码问题** 在7位数的电话号码中，且第一位不能为0，求数字0出现3次的概率.

$$\left(答案: p=\binom{9}{1}\binom{6}{3}\cdot1^3\cdot9^3\Big/9\times10^6\right)$$

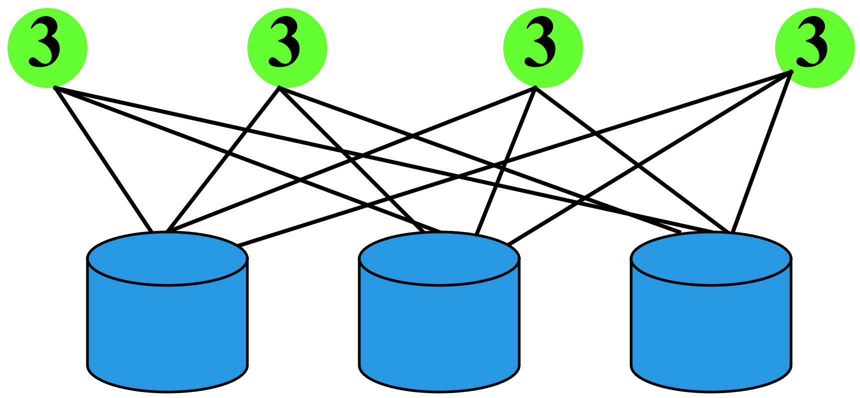
2° **骰子问题** 掷3颗均匀骰子，求点数之和为4的概率.

$$\left(答案: p=3\big/6^3\right)$$

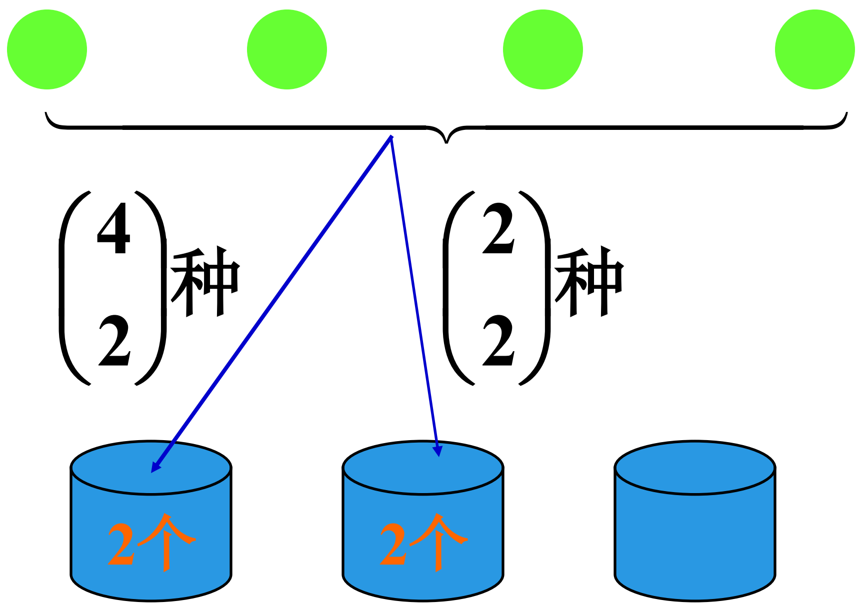
4.古典概型的基本模型:球放入杯子模型

(1)杯子容量无限

问题1 把 4 个球放到 3个杯子中去，求第1、2个杯子中各有两个球的概率，其中假设每个杯子可放任意多个球.



4个球放到3个杯子的所有放法 $3\times3\times3\times3=3^4$种,



因此第1、2个杯子中各有两个球的概率为

$$p=\binom{4}{2}\binom{2}{2}\Big/3^4=\frac{2}{27}.$$

(2) 每个杯子只能放一个球

问题2 把4个球放到10个杯子中去,每个杯子只能放一个球, 求第1 至第4个杯子各放一个球的概率.

解　第1至第4个杯子各放一个球的概率为

$$P = \frac{4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7}$$

$$= \frac{1}{210}.$$

课堂练习

1° **分房问题**　将张三、李四、王五3人等可能地分配到3 间房中去,试求每个房间恰有1人的概率.

(答案 : $2/9$)

2° **生日问题**　某班有20个学生都是同一年出生的,求有10个学生生日是1月1日,另外10个学生生日是12月31日的概率.

(答案 : $p=\binom{20}{10}\binom{10}{10}\Big/365^{20}$)

二、典型例题

例1 将一枚硬币抛掷三次. (1) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”, 求 $P(A_1)$. (2) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”, 求 $P(A_2)$.

解 (1) 设 H 为出现正面, T 为出现反面.

则 $S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

而 $A_1=\{HTT, THT, TTH\}$. 得 $P(A_1)=3/8$.

(2) $A_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$.

因此 $P(A_2)=7/8$.

例2 设有 N 件产品,其中有 D 件次品,今从中任取 n 件,问其中恰有 $k(k \le D)$ 件次品的概率是多少?

解 在N件产品中抽取n件的所有可能取法共有

$$\binom{N}{n}\text{种},$$

在 N 件产品中抽取n件,其中恰有k 件次品的取法

共有 $$\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}\text{种},$$

于是所求的概率为 $$p = \binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}\bigg/\binom{N}{n}.$$

例3 在1~2000的整数中随机地取一个数,问取到的整数既不能被6整除, 又不能被8整除的概率是多少？

解 设 A 为事件“取到的数能被6整除”,B为事件“取到的数能被8整除”，则所求概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\}.$$

因为 $333 < \dfrac{2000}{6} < 334$, 所以 $P(A) = \dfrac{333}{2000}$,

由于 $\frac{2000}{8}=250$, 故得 $P(B)=\frac{250}{2000}$.

由于 $83<\frac{2000}{24}<84$, 得 $P(AB)=\frac{83}{2000}$.

于是所求概率为

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-\{P(A)+P(B)-P(AB)\}$$

$$=1-\left(\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}\right)=\frac{3}{4}.$$

例4 将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去,这15名新生中有3名是优秀生.问 (1) 每一个班级各分配到一名优秀生的概率是多少? (2) 3 名优秀生分配在同一个班级的概率是多少?

解 15名新生平均分配到三个班级中的分法总数:

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{15!}{5!\,5!\,5!}.$$

(1) 每一个班级各分配到一名优秀生的分法共有

$$(3!\times 12!)/(4!\,4!\,4!)\text{种}.$$

因此所求概率为

$$p_1=\frac{3!\times 12!}{4!\,4!\,4!}\bigg/\frac{15!}{5!\,5!\,5!}=\frac{25}{91}.$$

(2)将3名优秀生分配在同一个班级的分法共有3种,

对于每一种分法,其余12名新生的分法有 $\dfrac{12!}{2!\,5!\,5!}$种.

因此3名优秀生分配在同一个班级的分法共有

$(3\times 12!)/(2!\,5!\,5!)$ 种, 因此所求概率为

$$p_2=\frac{3\times 12!}{2!\,5!\,5!}\bigg/\frac{15!}{5!\,5!\,5!}=\frac{6}{91}.$$

例5 某接待站在某一周曾接待过 12次来访,已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的,问是否可以推断接待时间是有规定的.

解 假设接待站的接待时间没有规定,且各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的.

7 7 7 7 · · · 7

周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日

故一周内接待 12 次来访共有 7^{12} 种.

2 2 2 2 ··· 2

周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日

12 次接待都是在周二和周四进行的共有 2^{12} 种.

故12 次接待都是在周二和周四进行的概率为

$$p=\frac{2^{12}}{7^{12}}=0.0000003.$$

概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的（实际推断原理），从而可知接待时间是有规定的.

例6 假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于 1/365 ,求 64 个人中至少有2人生日相同的概率.

解 64 个人生日各不相同的概率为

$$p_1 = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ \cdots \ \cdot (365 - 64 + 1)}{365^{64}}.$$

故64 个人中至少有2人生日相同的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ \cdots \ \cdot (365 - 64 + 1)}{365^{64}} = 0.997.$$

说明

随机选取$n(\leq 365)$个人,他们的生日各不相同的概率为

$$p=\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^{n}}.$$

而n个人中至少有两个人生日相同的概率为

$$p=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^{n}}.$$

三、几何概型

定义　当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量 (长度、 面积、体积) 相同的子区域是等可能的，则事件 *A* 的概率可定义为

$$P(A)=\frac{S_A}{S}.$$

(其中 S 是样本空间的度量,S_A 是构成事件 A的子区域的度量.) 这样借助于几何上的度量来合理规定的概率称为**几何概型**.

说明　当古典概型的试验结果为连续无穷多个时,就归结为几何概型.

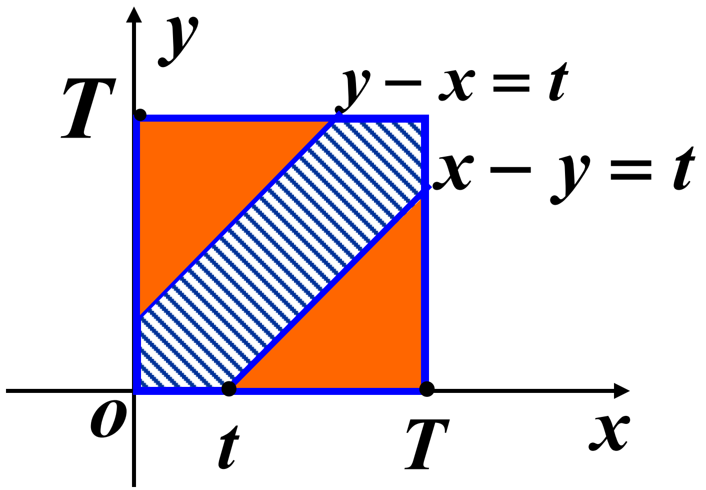
会面问题

例7 甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 先到的人等候另一个人, 经过时间 t ($t<T$) 后离去.设每人在0 到T 这段时间内各时刻到达该地是等可能的 , 且两人到达的时刻互不牵连.求甲、乙两人能会面的概率.

解 设 x, y 分别为甲、乙两人到达的时刻,那么 $0 \le x \le T, \quad 0 \le y \le T.$

两人会面的充要条件为 $|x-y| \le t,$

若以 x, y 表示平面上点的坐标，则有



故所求的概率为

$$p=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}$$

$$=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}$$

$$=1-(1-\frac{t}{T})^2.$$

例8 甲、乙两人约定在下午1 时到2 时之间到某站乘公共汽车，又这段时间内有四班公共汽车，它们的开车时刻分别为 1:15、1:30、1:45、2:00. 如果甲、乙约定 (1) 见车就乘; (2) 最多等一辆车. 求甲、乙同乘一车的概率.

假定甲、乙两人到达车站的时刻是互相不牵连的，且每人在 1 时到 2 时的任何时刻到达车站是等可能的.

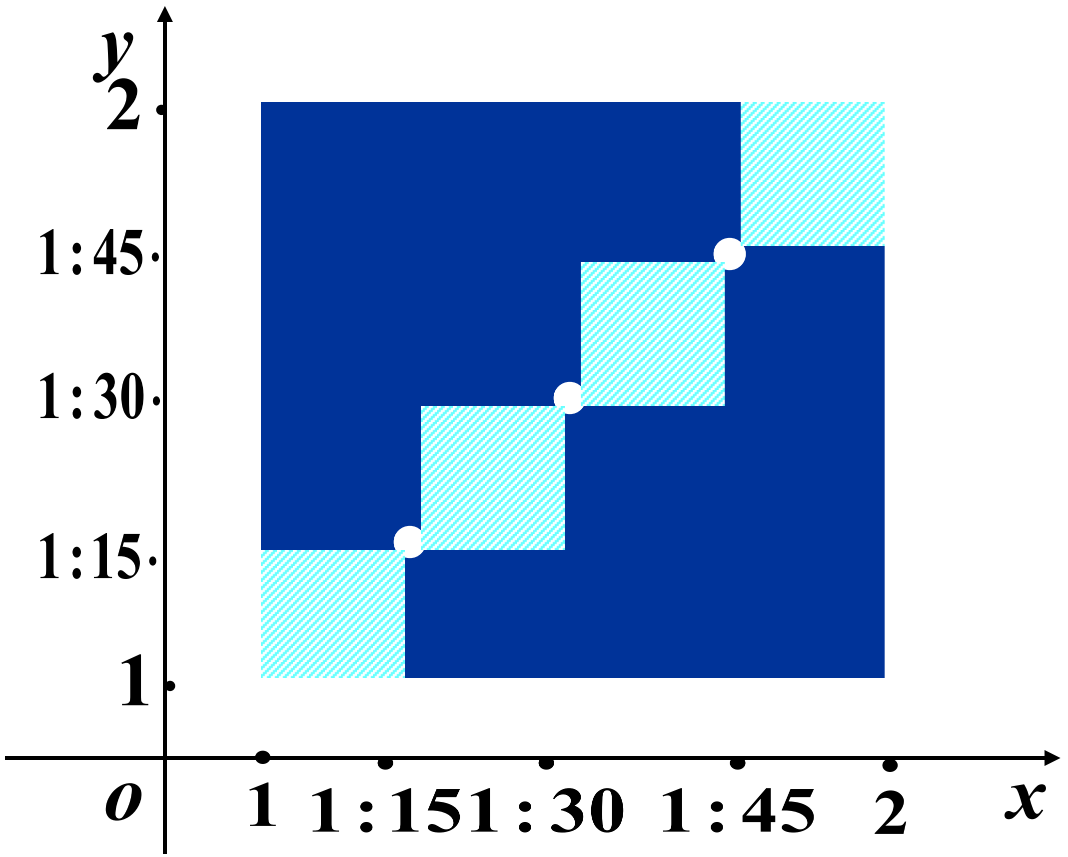
解

设 x, y 分别为甲、乙两人到达的时刻,

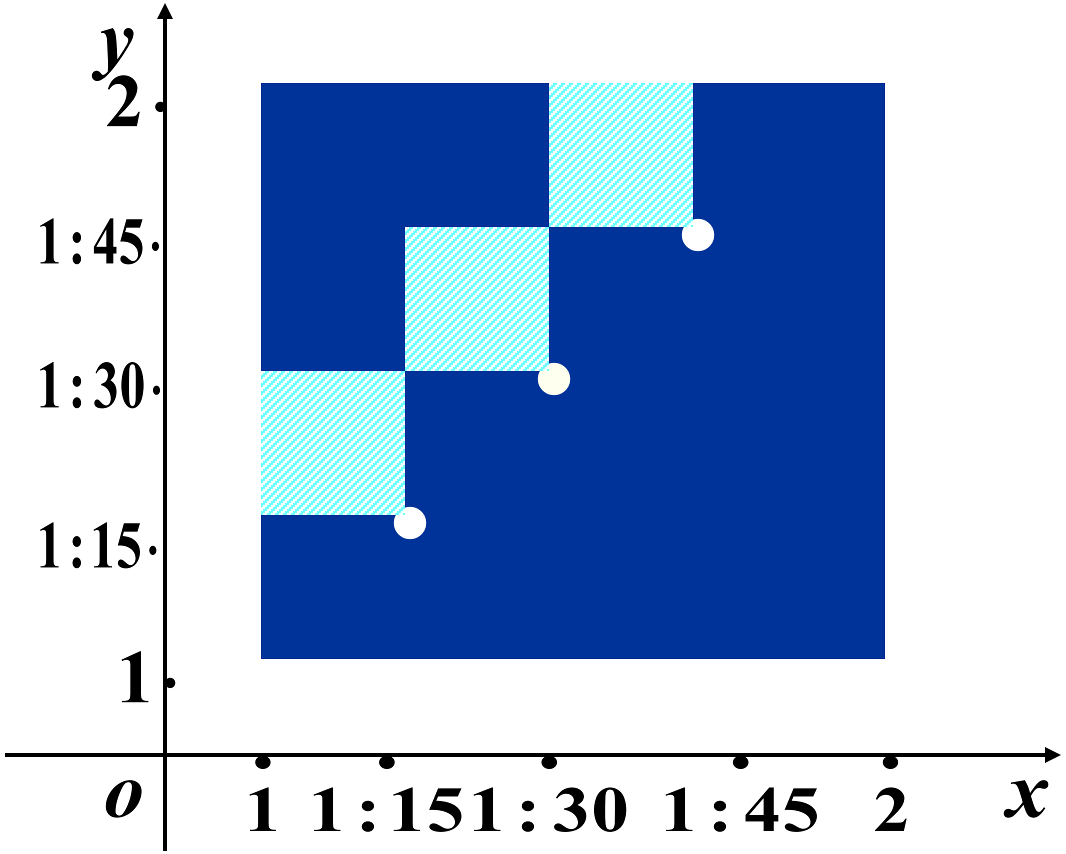
则有

$$1 \le x \le 2,$$

$$1 \le y \le 2.$$



见车就乘的概率为 $p = \dfrac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}} = \dfrac{4\times(1/4)^2}{(2-1)^2} = \dfrac{1}{4}.$



最多等一辆车,甲、乙同乘一车的概率为 $p=\frac{1}{4}+\frac{3\times(1/16)}{1}\times 2=\frac{5}{8}$.

四、小结

$$\text{最简单的随机现象} \longrightarrow \text{古典概型} \xrightarrow[\text{连续无穷}]{\text{试验结果}} \text{几何概型}$$

$$\downarrow$$

古典概率

$$\downarrow$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}$$

第五节　条件概率

一、条件概率

二、乘法定理

三、全概率公式与贝叶斯公式

四、小结

一、条件概率

1. 引例 将一枚硬币抛掷两次 ,观察其出现正反两面的情况,设事件 A为 “至少有一次为正面”,事件B为 “两次掷出同一面” . 现在来求已知事件A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

设 H 为正面, T 为反面.

分析

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

$$A=\{HH,HT,TH\},\quad B=\{HH,TT\},\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

事件A 已经发生的条件下事件B 发生的概率,记为

$P(B|A)$, 则 $P(B|A)=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1/4}{3/4}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\neq P(B).$

2. 定义

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

同理可得 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

3. 性质

(1) 非负性： $P(B|A) \geq 0;$

(2) 规范性： $P(S|B) = 1,\ P(\varnothing|B) = 0;$

(3) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B);$$

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B).$$

二、 乘法定理

设 $P(A)>0$, 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

推广 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geq 2$,

且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\times$$
$$P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\times\cdots\times P(A_2|A_1)P(A_1).$$

例1 一盒子装有4 只产品, 其中有3 只一等品、1只二等品. 从中取产品两次, 每次任取一只, 作不放回抽样. 设事件*A*为“第一次取到的是一等品”、事件*B*为“第二次取到的是一等品”. 试求条件概率 $P(B|A)$.

解 将产品编号, 1, 2, 3 为一等品; 4 号为二等品. 以 (i, j) 表示第一次、第二次分别取到第 i 号、第 j 号产品, 则试验的样本空间为

$$S=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,3),\ (2,4),\cdots,\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3)\},$$

$$A = \{(1,2),\quad (1,3),\quad (1,4),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (2,4),$$
$$(3,1),\quad (3,2),\quad (3,4)\},$$

$$AB = \{(1,2),\quad (1,3),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (3,1),\quad (3,2)\},$$

由条件概率的公式得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$= \frac{6/12}{9/12} = \frac{2}{3}.$$

例2 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解 设 A 表示“ 能活 20 岁以上 ” 的事件,

B 表示 “ 能活 25 岁以上”的事件,

则有 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

因为 $P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4,\quad P(AB)=P(B),$

所以 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

抓阄是否与次序有关?

例3 五个阄, 其中两个阄内写着“有”字, 三个阄内不写字, 五人依次抓取, 问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

解 设 A_i 表示“第 i 人抓到有字阄”的事件,

$i=1,2,3,4,5.$ 则有 $P(A_1)=\frac{2}{5},$

$$P(A_2)=P(A_2S)=P(A_2\cap(A_1\cup\overline{A_1}))$$

$$= P(A_1A_2 \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5},$$

$$P(A_3) = P(A_3S) = P(A_3(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}))$$

$$= P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2} \mid A_1)P(A_3 \mid A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}A_2)$$

$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}\ \overline{A_2})$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

依此类推 $P(A_4) = P(A_5) = \dfrac{2}{5}.$

故抓阄与次序无关.

摸球试验

例4 设袋中装有 r 只红球、t 只白球.每次自袋中任取一只球,观察其颜色然后放回,并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球,若在袋中连续取球四次,试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解 设 $A_i\ (i=1,2,3,4)$ 为事件"第 i 次取到红球"

则 $\overline{A_3}$、$\overline{A_4}$ 为事件第三、四次取到白球.

因此所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$= P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$= \frac{t+a}{r+t+3a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{r}{r+t}.$$

此模型被波利亚用来作为描述传染病的数学模型.

例5 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为1/2,若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为7/10 , 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以$A_i(i=1,2,3)$表示事件"透镜第 i 次落下打破",

以*B* 表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

所以 $P(B)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$

$$=(1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{200}.$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

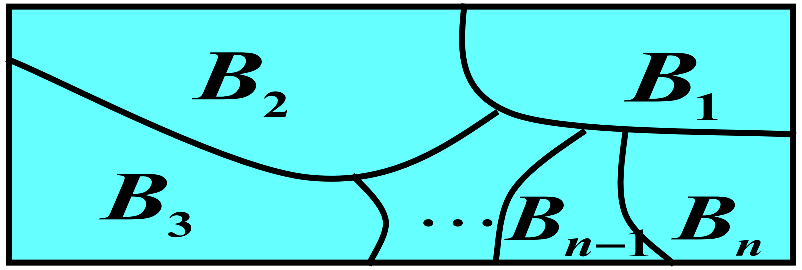
1. 样本空间的划分

定义 设 S 为试验E的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件,若

(i) $B_i B_j = \varnothing, i \neq j, \ i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(ii) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S.$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



2. 全概率公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

全概率公式

证明 $A = AS = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$

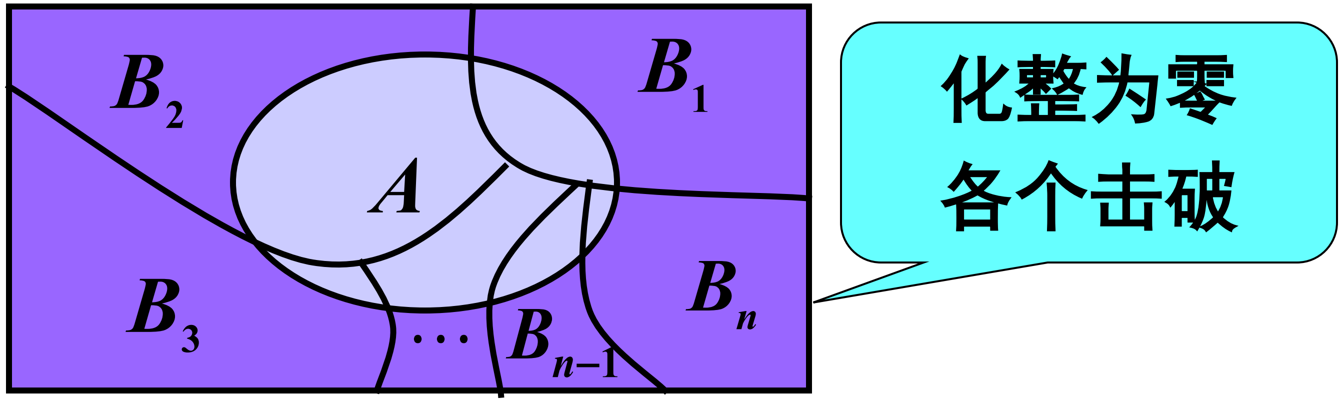
$$= AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n.$$

由 $B_iB_j = \varnothing \Rightarrow (AB_i)(AB_j) = \varnothing$

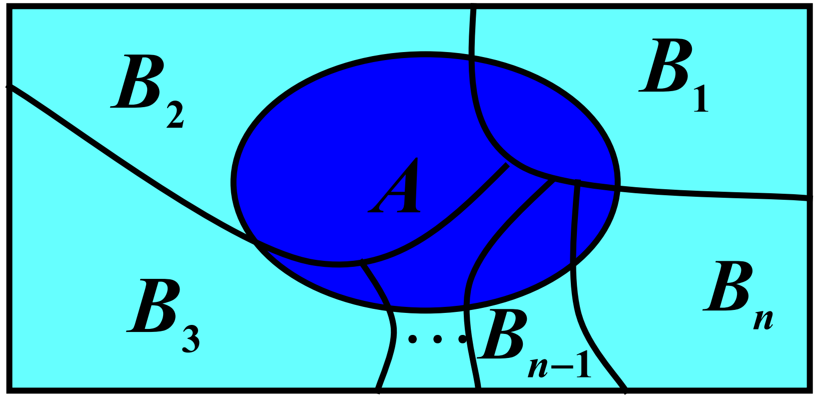
$\Rightarrow P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$

$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n).$

图示



说明　全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果.



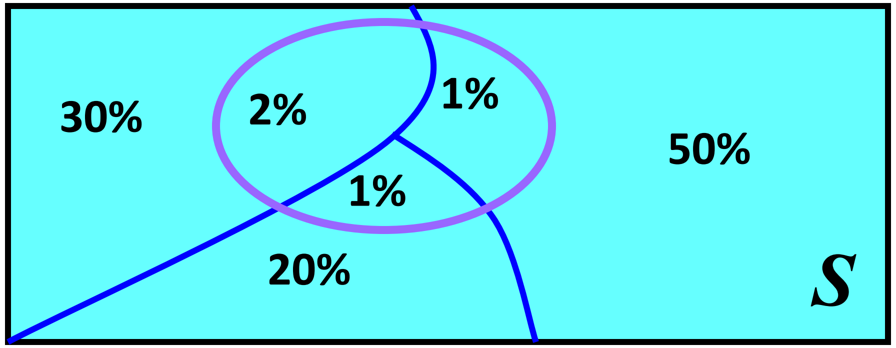
例6 有一批同一型号的产品，已知其中由一厂生产的占 30%，二厂生产的占 50%，三厂生产的占 20%，又知这三个厂的产品次品率分别为 2%， 1%，1%，问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

解 设事件 A 为“任取一件为次品”，

事件 B_i 为“任取一件为 i 厂的产品”, $i=1,2,3.$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S,$$

$$B_i B_j = \varnothing, \quad i,j = 1,2,3.$$



由全概率公式得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

$$P(B_1) = 0.3,\ \ P(B_2) = 0.5,\ \ P(B_3) = 0.2,$$

$$P(A|B_1) = 0.02,\ P(A|B_2) = 0.01,\ P(A|B_3) = 0.01,$$

故 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$

$$= 0.02 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 + 0.01 \times 0.2 = 0.013.$$

3. 贝叶斯公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S. A 为 E 的事件, B_1, $B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$, $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

称此为**贝叶斯公式**.

证明

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

例7 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只元件,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只元件，若已知取到的是次品，为分析此次品出自何厂，需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

解 设 A 表示"取到的是一只次品"，$B_i\ (i=1,2,3)$ 表示"所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 S 的一个划分，

且 $P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.80,\quad P(B_3)=0.05,$

$$P(A|B_1) = 0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

$$= 0.0125.$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24.$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=0.64,$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大.

例8 对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为55%. 每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为95%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整得良好的概率是多少?

解 设 A 为事件"产品合格",

B 为事件"机器调整良好".

则有

$$P(A|B)=0.98, \quad P(A|\overline{B})=0.55,$$

$$P(B)=0.95,\qquad P(\overline{B})=0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}=0.97.$$

即当生产出第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为0.97.

先验概率与后验概率

上题中概率 **0.95** 是由以往的数据分析得到的, 叫做先验概率.

而在得到信息之后再重新加以修正的概率 **0.97** 叫做后验概率.

例9 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：若以 A 表示事件“试验反应为阳性”，以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”，则有 $P(A|C)=0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即 $P(C)=0.005$, 试求 $P(C|A)$.

解 因为 $P(A|C)=0.95$,

$$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05,$$

$$P(C)=0.005,\quad P(\overline{C})=0.995,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}$$

$$=0.087.$$

即平均1000个具有阳性反应的人中大约只有87人患有癌症.

四、小结

1.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ $\longrightarrow$ **乘法定理**

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

$\downarrow$

全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

$\downarrow$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

2. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

$P(AB)$ 表示在样本空间 S 中, AB 发生的概率,而 $P(B|A)$表示在缩小的样本空间 S_A 中, B 发生的概率.用古典概率公式,则

$$P(B|A)=\frac{AB\text{中基本事件数}}{S_A\text{中基本事件数}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{中基本事件数}}{S\text{中基本事件数}},$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大.

随堂测试

一个男子在某城市的一条街道遭到背后袭击和抢劫，他断言凶犯是黑人.然而，当调查这一案件的警察在可比较的光照条件下多次重新展现现场情况时，发现受害者正确识别袭击者肤色的概率只有80%，假定凶犯是本地人，而在这个城市人口中90%是白人，10%是黑人，且假定白人和黑人的犯罪率相同，

（1）问：在这位男子断言凶犯是黑人的情况下，袭击他的凶犯确实是黑人的概率是多大？

（2）问：在这位男子断言凶犯是黑人的情况下，袭击他的凶犯是白人的概率是多大？

A1：袭击他的是白人；A2：袭击他的是黑人。

B1：他断言是白人；B2：他断言是黑人。

求：断言是黑人时袭击者是黑人的概率P(A2|B2)

断言是黑人时袭击者是白人的概率P(A1|B2)

按题意有：

P(A1)=0.9，P(A2)=0.1

P(B1|A1)=0.8，P(B2|A1)=0.2；P(B1|A2)=0.2，P(B2|A2)=0.8

由全概率公式：

P(B2)=P(A1)P(B2|A1)+P(A2)P(B2|A2)=0.9*0.2+0.1*0.8=0.26

由贝叶斯公式：

P(A2|B2)=P(A2)P(B2|A2)/P(B2)=0.08/0.26=4/13

P(A1|B2)=P(A1)P(B2|A1)/P(B2)=0.18/0.26=9/13

第六节　　独立性

一、事件的相互独立性

二、几个重要定理

三、例题讲解

四、小结

一、事件的相互独立性

1.引例 盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A=$ 第一次抽取,取到绿球,

$B=$ 第二次抽取,取到绿球,

则有

$$P(B|A)=P(B),$$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

$$P(B|A)=P(B) \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

2.定义

设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立,简称 A, B 独立.

说明

事件 A 与 事件 B 相互独立,是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

请同学们思考

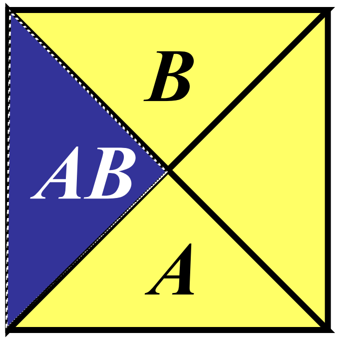
两事件相互独立与两事件互斥的关系 ？？？

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如



若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$,

则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

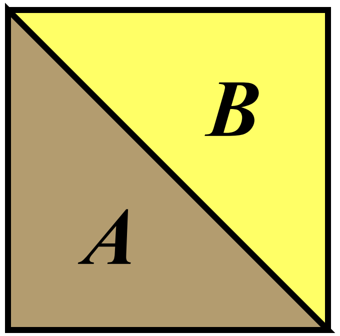
由此可见两事件相互独立，但两事件不互斥.

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$

则 $P(AB)=0,$

$P(A)P(B)=\frac{1}{4},$

故 $P(AB)\neq P(A)P(B).$



由此可见两事件互斥但不独立.

3.三事件两两相互独立的概念

定义　设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

4.三事件相互独立的概念

定义　设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

推广

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $n\ (n \geq 2)$ 个事件，如果**对于其中任意2个，任意3个，…，任意n个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积**

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **为相互独立的事件.**

二、几个重要定理

定理一 设 A, B 是两事件,且 $P(A)>0$. 若 A, B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$. 反之亦然.

证明 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B).$$

定理二 若 A, B 相互独立,则下列各对事件,

$\overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

证明 先证 A 与 $\overline{B}$ 独立.

因为 $A = AB \cup A\overline{B}$ 且 $(AB)(A\overline{B}) = \varnothing$,

所以 $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$,

即 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$.

又因为 **A**、**B** 相互独立, 所以有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

因而 $P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)$

$$=P(A)(1-P(B))$$

$$=P(A)P(\overline{B}).$$

从而 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

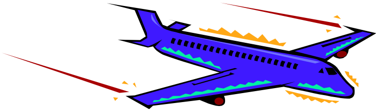
两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n\ (n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 $k\ (2 \leq k \leq n)$ 个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

三、例题讲解

射击问题



例1 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2，若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为“第 i 名射手击落飞机”,

$i = 1,2,\cdots,10.$

事件 B 为“击落飞机”,

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.$$

例2 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解 设 A_i 表示有 i 个人击中飞机,

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中飞机 ,

X表示飞机被击落

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于 $A_1 = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C,$

故得

$$P(A_1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36.$$

因为 $A_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC,$

得 $P(A_2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.41.$$

由 $A_3 = ABC$， 得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458.$$

例4 同时抛掷一对骰子,共抛两次,求两次所得点数分别为7与11的概率.

解 设事件 A_i 为“第 i 次得7点” $i=1,2.$

设事件 B_i 为“第 i 次得11点” $i=1,2.$

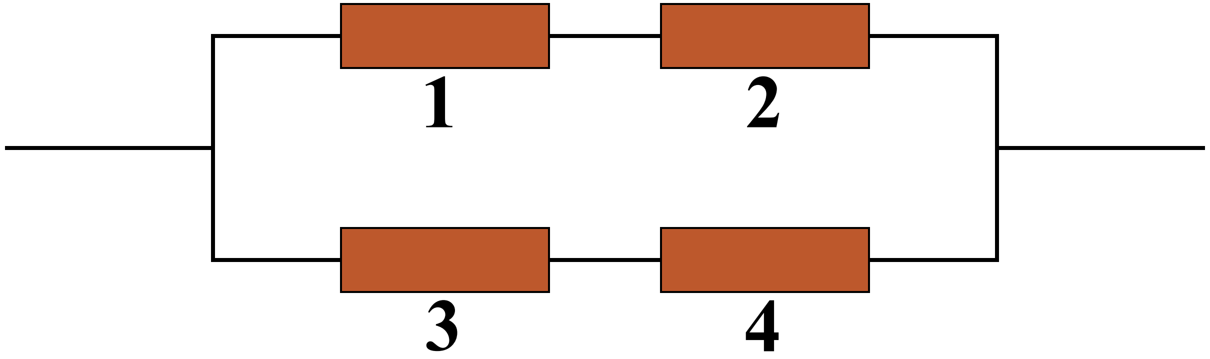
事件 *A* 为两次所得点数分别为 7 与 11.

则有 $P(A)=P(A_1B_2\cup B_1A_2)=P(A_1B_2)+P(B_1A_2)$

$$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)$$

$$=\frac{6}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{6}{36}=\frac{1}{54}.$$

例5 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性.如图所示,设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4 按先串联再并联的方式联结(称为串并联系统),设第 i 个元件的可靠性为 p_i $(i=1,2,3,4)$. 试求系统的可靠性 .



解

以 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示事件第 i 个元件正常工作,

以 A 表示系统正常工作.

则有 $A = A_1 A_2 \cup A_3 A_4$.

由事件的独立性,得系统的可靠性:

$$P(A) = P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) - P(A_1 A_2 A_3 A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p_1 p_2 + p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4.$$

例6　要验收一批(100件)乐器.验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解　设以 $H_i\ (i=0,1,2,3)$ 表示事件"随机地取出3件乐器,其中恰有 i 件音色不纯",

H_0, H_1, H_2, H_3 是 S 的一个划分,

以 A 表示事件 “这批乐器被接收”.已知一件音色纯的乐器 , 经测试被认为音色纯的概率为 0.99 , 而一件音色不纯的乐器,经测试被认为音色纯的概率为0.05，并且三件乐器的测试是相互独立的, 于是有

$$P(A|H_0) = (0.99)^3, \quad P(A|H_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A|H_2) = 0.99 \times (0.05)^2, \quad P(A|H_3) = (0.05)^3,$$

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$,

$$P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3},$$

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

故 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|H_i)P(H_i)$

$$=0.8574+0.0055+0+0=0.8629.$$

例7 甲、乙两人进行乒乓球比赛,每局甲胜的概率为 $p(p \geq 1/2)$,问对甲而言,采用三局二胜制有利,还是采用五局三胜制有利. 设各局胜负相互独立.

解 采用三局二胜制,甲最终获胜,

胜局情况可能是:

"甲甲", "乙甲甲", "甲乙甲";

由于这三种情况相互独立,

于是由独立性得甲最终获胜的概率为:

$$p_1 = p^2 + 2p^2(1-p).$$

采用五局三胜制,甲最终获胜,至少需比赛 3 局,

且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜二 局.

例如,比赛四局, 则甲的胜局情况可能是:

“甲乙甲甲” ,“乙甲甲甲” ,“甲甲乙甲” ;

由于这三种情况相互独立, 于是由独立性得:

在五局三胜制下,甲最终获胜的概率为:

$$p_2 = p^3 + \binom{3}{2}p^3(1-p) + \binom{4}{2}p^3(1-p)^2.$$

由于 $p_2 - p_1 = p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3)$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$; 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$.

故当 $p > \frac{1}{2}$ 时,对甲来说采用五局三胜制有利.

当 $p = \frac{1}{2}$ 时,两种赛制甲最终获胜的概率是

相同的,都是 $\frac{1}{2}$.

四、小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.