《概率论与数理统计》第二周要点

学习要点：等可能概型、几何概型、条件概率、全概率公式、贝叶斯公式

1. 等可能概型（古典概型）

- 特点：
  1. 样本空间有限；
  2. 每个基本事件发生的可能性相同。
- 概率计算公式：
  $$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$
  其中 $|A|$ 是事件 A 中包含的基本事件数，$|S|$ 是样本空间的基本事件总数。

典型例题 抛一枚硬币三次，设事件 A 为“恰有一次出现正面”。样本空间大小 $|S| = 8$，而事件 A 的样本点有 $\{HTT, THT, TTH\}$，所以

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{8}.$$

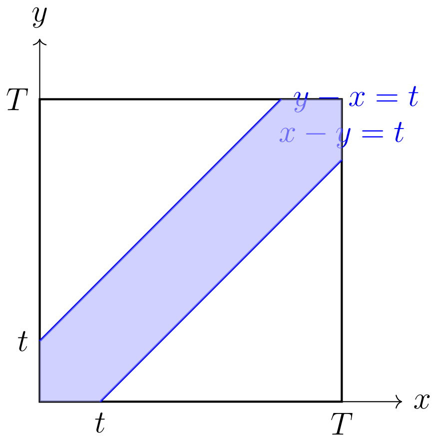
—

2. 几何概型

- 定义：当随机试验的样本空间是某一区域，并且每一点出现是等可能的，则事件 A 的概率定义为
  $$P(A) = \frac{S_A}{S}$$
  其中 S 为样本空间的度量（长度、面积或体积），S_A 为构成事件 A 的子区域度量。
- 说明：当古典概型的试验结果为连续无穷多个时，就归结为几何概型。

典型例题：会面问题 甲、乙两人约定在 0 到 T 时间段内到达，若先到者最多等待时间 t 后离开，则他们能会面的概率为

$$p = \frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$



—

3. 条件概率

- 定义（$P(A)>0$）：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

- 性质：$P(\cdot|A)$ 本身满足概率的三个公理。

- 乘法公式：

$$P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$$

- 推广：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

典型例题 一盒中有 3 件一等品、1 件二等品。设事件 A 为“第一次取到一等品”，事件 B 为“第二次取到一等品”（不放回）。则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}.$$

—

4. 全概率公式

设 $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ 是样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0$，则对任意事件 A：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

典型例题 某电子厂元件由三家供应：$P(B_1) = 0.15$，$P(B_2) = 0.80$，$P(B_3) = 0.05$，其次品率分别为 $P(A|B_1) = 0.02, P(A|B_2) = 0.01, P(A|B_3) = 0.03$。则随机取一件为次品的概率：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.02 \times 0.15 + 0.01 \times 0.80 + 0.03 \times 0.05 \\ &= 0.0125. \end{aligned}$$

—

5. 贝叶斯公式

若 $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ 是样本空间 S 的一个划分，且 $P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

典型例题 承接上题，若已知取到的元件是次品，求它来自 B_1, B_2, B_3 的概率：

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24,$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.01 \times 0.80}{0.0125} = 0.64,$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.03 \times 0.05}{0.0125} = 0.12.$$

因此，该次品最可能来自供应商 B_2。