《概率论与数理统计》第三周要点

学习要点：独立性

6. 独立性

(1) 两事件的独立性

- 定义：若 $P(A) > 0, P(B) > 0$，且

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

  则称事件 A 与 B 独立。

- 等价条件：$P(B|A) = P(B)$ 或 $P(A|B) = P(A)$。
- 直观含义：一个事件的发生不影响另一个事件发生的概率。

典型例题 抛两枚硬币，设 $A =$ “甲为正面”，$B =$ “乙为正面”。

$$P(AB) = \tfrac{1}{4}, \quad P(A)P(B) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

所以 A, B 独立。

—

(2) 多个事件的独立性

- 三个事件 A, B, C 相互独立，当且仅当：

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned}$$

- 推广到 n 个事件：任意子集的联合概率等于各自概率的乘积。
- 注意：两两独立 $\not\Rightarrow$ 相互独立。

典型例题 掷一颗骰子两次，设 $A =$ “第一次点数为奇数”，$B =$ “第二次点数为奇数”，$C =$ “两次点数之和为偶数”。可验证 A, B 独立，A, C 独立，B, C 独立，但 A, B, C 不相互独立。

—

(3) 独立性的推论

- 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，则其中任意若干个事件仍相互独立。
- 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，则将其中若干事件替换为它们的对立事件，所得的新事件组仍相互独立。

—

(4) 实际判断

- 独立性通常需结合实际背景来判断。
- 例如：若甲乙两人生活环境完全不同，可近似认为“甲患感冒”与“乙患感冒”独立；若同住一室，则不能认为独立。

—

典型应用：系统可靠性 设系统由四个元件组成，如图所示串并联结构：事件 $A_i =$“第 i 个元件正常工作”。系统正常工作的事件为

$$A = (A_1A_2) \cup (A_3A_4).$$

由独立性得系统可靠性：

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).$$