第二章
随机变量及其分布

第一节　　随机变量

一、随机变量的引入

二、随机变量的概念

三、小结

一、随机变量的引入

1. 为什么引入随机变量?

概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便有力的研究随机现象，就要用数学分析的方法来研究， 因此为了便于数学上的推导和计算，就需将任意的随机事件数量化．当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时， 就建立起了随机变量的概念.

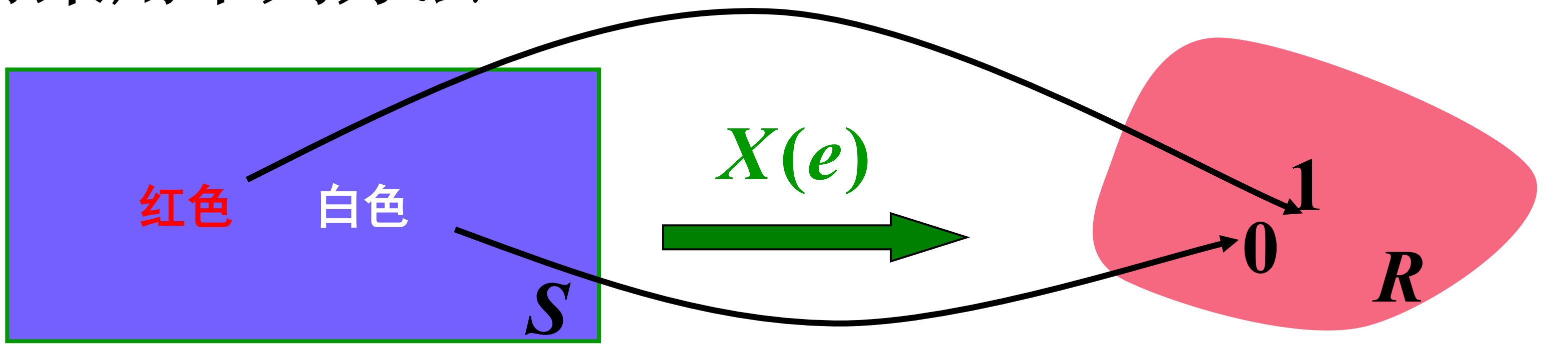
2. 随机变量的引入

实例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球，观察摸出球的颜色.

S={红色、白色} $\xrightarrow{?}$ 将 S 数量化

非数量

可采用下列方法



即有　　X(红色)=1，　X(白色)=0.

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

这样便将非数量的 S={红色，白色} 数量化了.

二、随机变量的概念

1.定义

设 E 是随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$. 如果对于每一个 $e\in S$，有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 S 上的单值实值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为随机变量.

有许多随机试验，它们的结果本身是一个数，即样本点e本身是一个数。我们令X=X(e)=e, 那么X就是一个随机变量。我们一般以大写字母表示随机变量，小写字母表示实数

2.说明

(1)随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数，但它与普通的函数有着本质的差别，普通函数是定义在实数轴上的,而随机变量是定义在样本空间上的 (样本空间的元素不一定是实数).

(2)随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值,由于试验的各个结果的出现具有一定的概率, 因此随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机变量的引入，使我们能用随机变量来描述各种随机现象，并能利用数学分析的方法对随机试验的结果进行深入广泛的研究和讨论。

实例2　掷一个硬币, 观察出现的面 , 共有两个

结果:　$e_1 = (\text{反面朝上})$, 

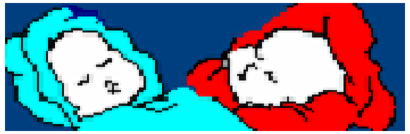
$e_2 = (\text{正面朝上})$, 

若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数, 则有

$$\boxed{\begin{matrix} e_1 = (\text{反面朝上}) \\ \\ e_2 = (\text{正面朝上}) \end{matrix}} \xrightarrow{X(e)} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \\ 1 \end{matrix}} \begin{matrix} \to X(e_1) = 0 \\ \\ \to X(e_2) = 1 \end{matrix}$$

即 $X(e)$ 是一个随机变量.

实例3 在有两个孩子的家庭中,考虑其性别，共有 4 个样本点:



$e_1=(男,男), e_2=(男,女), e_3=(女,男), e_4=(女,女).$

若用 *X* 表示该家女孩子的个数时，则有

$X(e_1)=0,\quad X(e_2)=1,\quad X(e_3)=1,\quad X(e_4)=2,$

可得随机变量 *X*(*e*),

$$X(e)=\begin{cases}0, & e=e_1,\\ 1, & e=e_2, e=e_3,\\ 2, & e=e_4.\end{cases}$$

实例4 设盒中有5个球 (2白3黑), 从中任抽3个,则

$$X(e) = \text{抽得的白球数},$$

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$0, \quad 1, \quad 2.$$

实例5 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射击30次, 则

$$X(e) = \text{射中目标的次数},$$

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \cdots, \quad 30.$$

实例6 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8,

现该射手不断向目标射击 , 直到击中目标为止,则

$$X(e) = \text{所需射击次数},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \cdots \quad .$$

实例7　某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过, 如果某人到达该车站的时刻是随机的, 则

$$X(e) = \text{此人的等车时间},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为: $[0,5]$.

3.随机变量的分类

- 随机变量
  - 离散型
  - 非离散型
    - 连续型
    - 其它

(1)离散型　随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

实例1　观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是：　1，2，3，4，5，6.

实例2 若随机变量 X 记为 “连续射击, 直至命中时的射击次数”, 则 X 的可能值是:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots.$$

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次,则随机变量 X 记为 “击中目标的次数” 则 X 的所有可能取值为:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad 30.$$

(2)连续型　随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例1　随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

实例2　随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

则 X 的取值范围为 (a, b) .

三、小结

1. 概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，因此为了方便有力的研究随机现象， 就需将随机事件数量化，把一些非数量表示的随机事件用数字表示时， 就建立起了随机变量的概念． 因此随机变量是定义在样本空间上的一种特殊的函数.

2. 随机变量的分类: 离散型、连续型.

第二节　离散型随机变量及其分布律

一、离散型随机变量的分布律

二、常见离散型随机变量的概率分布

三、小结

一、离散型随机变量的分布律

定义 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k\ (k=1,2,\cdots)$, X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率, 为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

称此为离散型随机变量 X 的分布律.

说明 (1) $p_k \ge 0,\quad k=1,2,\cdots;$

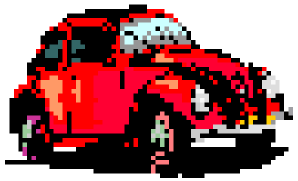
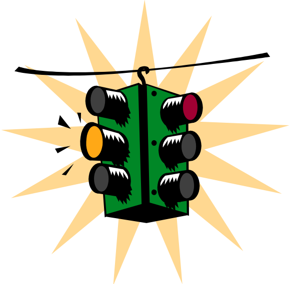
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

离散型随机变量的分布律也可表示为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

例1 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四组信号灯,每组信号灯以1/2的概率允许或禁止汽车通过.以 X 表示汽车首次停下时,它已通过的信号灯的组数(设各组信号灯的工作是相互独立的),求 X 的分布律.

解

设 p 为每组信号灯禁止汽车通过的概率,则有

X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

将 $p=\frac{1}{2}$ 代入得

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

二、常见离散型随机变量的概率分布

1.两点分布 （0–1）分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值，它的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从 (0—1) 分布或两点分布.

实例1 “抛硬币”试验,观察正、反两面情况.

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当} e = \text{正面}, \\ 1, & \text{当} e = \text{反面}. \end{cases}$$

随机变量 *X* 服从 (0—1) 分布.

其分布律为

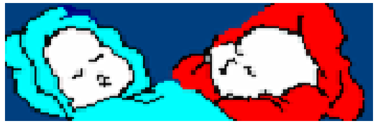
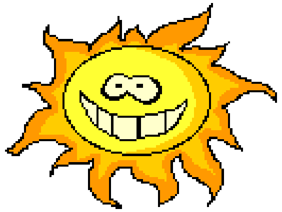
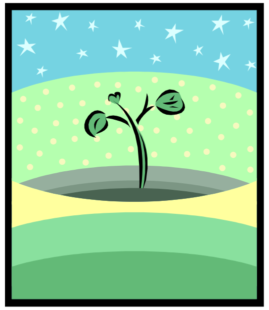
X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

实例2　200件产品中,有190件合格品,10件不合格品,现从中随机抽取一件,那末,若规定

$$X=\begin{cases}1, & \text{取得不合格品,}\\ 0, & \text{取得合格品.}\end{cases}$$

X	0	1
p_k	$\frac{190}{200}$	$\frac{10}{200}$

则随机变量 X 服从(0 —1)分布.

说明

两点分布是最简单的一种分布,任何一个只有两种可能结果的随机现象, 比如新生婴儿是男还是女、明天是否下雨、种籽是否发芽等, 都属于两点分布.

2.等可能分布

如果随机变量 X 的分布律为

X	a_1	$a_2 \cdots a_n$
p_k	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n} \cdots \dfrac{1}{n}$

其中$(a_i \neq a_j), (i \neq j)$,则称X服从等可能分布.

实例 抛掷骰子并记出现的点数为随机变量 X,

则有

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.二项分布

(1) 重复独立试验

将试验 E 重复进行 n 次, 若各次试验的结果互不影响, 即每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果, 则称这 n 次试验是**相互独立**的, 或称为 **n 次重复独立试验**.

(2) n 重伯努利试验

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利试验.

设 $P(A)=p\ (0<p<1)$，此时 $P(\overline{A})=1-p$.

将 E 独立地重复地进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n **重伯努利试验**.

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次,就是n重伯努利试验.

实例2 抛一颗骰子n次,观察是否 “出现 1 点”, 就是 n重伯努利试验.

(3) 二项概率公式

若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 所有可能取的值为

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n.$$

当 $X = k\ (0 \le k \le n)$ 时,

即 A 在 n 次试验中发生了 k 次.

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{次}}\ \underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\cdots\bar{A}}_{n-k\text{ 次}},$$

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 $\binom{n}{k}$ 种,

且两两互不相容.

因此 A在 n 次试验中发生 k 次的概率为

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记 } q=1-p} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

得 X的分布律为

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
p_k	q^n	$\binom{n}{1} p q^{n-1}$	$\cdots$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\cdots$	p^n

称随机变量X服从参数为n, p的二项分布。记为

$$X \sim b(n, p).$$

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布

例如 在相同条件下相互独立地进行 5 次射击,每次射击时击中目标的概率为 0.6 ,则击中目标的次数 *X* 服从 *b* (5,0.6) 的二项分布.

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$(0.4)^5$	$\binom{5}{1}0.6\cdot 0.4^4$	$\binom{5}{2}0.6^2\cdot 0.4^3$	$\binom{5}{3}0.6^3\cdot 0.4^2$	$\binom{5}{4}0.6^4\cdot 0.4$	0.6^5

例2 按规定,某种型号电子元件的使用寿命超过1500小时的为一级品.已知某一大批产品的一级品率为0.2,现在从中随机地抽查20只.问20只元件中恰有k只$(k=0,1,\cdots,20)$一级品的概率是多少?

分析 这是不放回抽样.但由于这批元件的总数很大,且抽查元件的数量相对于元件的总数来说又很小,因而此抽样可近似当作放回抽样来处理.

把检查一只元件是否为一级品看成是一次试验,检查20只元件相当于做20重伯努利试验.

解 以 X 记 20 只元件中一级品的只数,

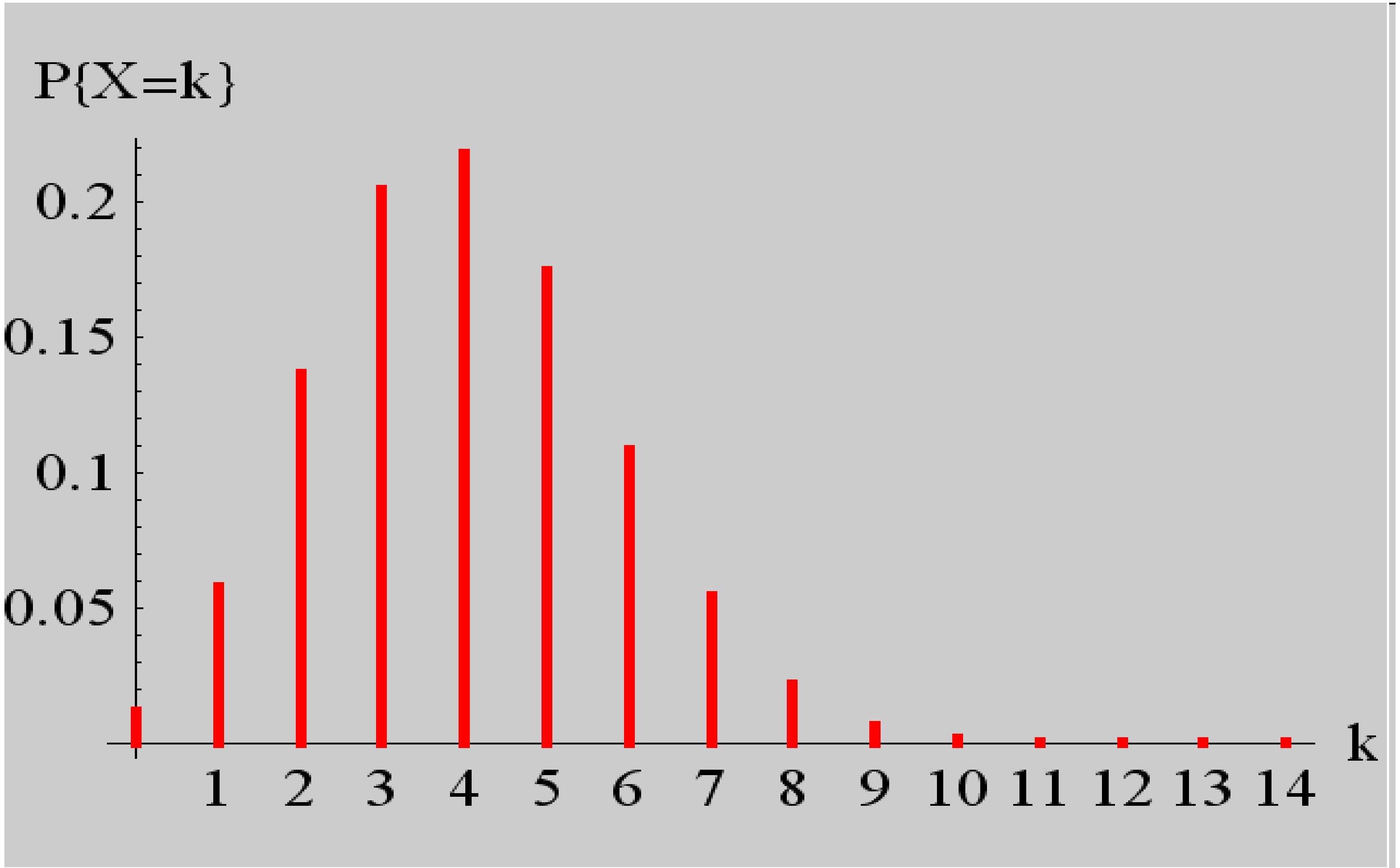
则 $X \sim b(20, 0.2)$, 因此所求概率为

$$P\{X=k\}=\binom{20}{k}(0.2)^k(0.8)^{20-k},\ k=0,1,\cdots,20.$$

$P\{X=0\}=0.012$	$P\{X=4\}=0.218$	$P\{X=8\}=0.022$
$P\{X=1\}=0.058$	$P\{X=5\}=0.175$	$P\{X=9\}=0.007$
$P\{X=2\}=0.137$	$P\{X=6\}=0.109$	$P\{X=10\}=0.002$
$P\{X=3\}=0.205$	$P\{X=7\}=0.055$	

当 $k \geq 11$ 时, $P\{X=k\}<0.001$

图示概率分布



例3 某人进行射击,设每次射击的命中率为0.02,独立射击 400 次,试求至少击中两次的概率.

解 设击中的次数为 X,

则 $X \sim b(400, 0.02)$.

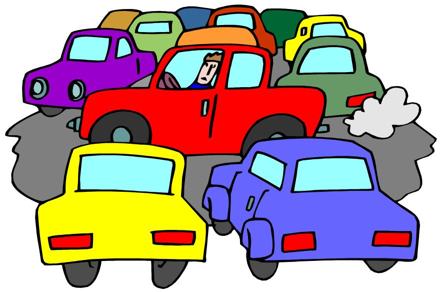
X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{400}{k}(0.02)^k (0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, 400.$$

因此 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972.$$

例4 有一繁忙的汽车站,每天有大量汽车通过,设每辆汽车在一天的某段时间内,出事故的概率为0.0001,在每天的该段时间内有1000 辆汽车通过, 问出事故的次数不小于2的概率是多少?



解 设 1000 辆车通过,
出事故的次数为 X, 则

$$X \sim b(1000, 0.0001),$$

故所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

二项分布 $\xrightarrow{np \to \lambda\,(n \to +\infty)}$ 泊松分布

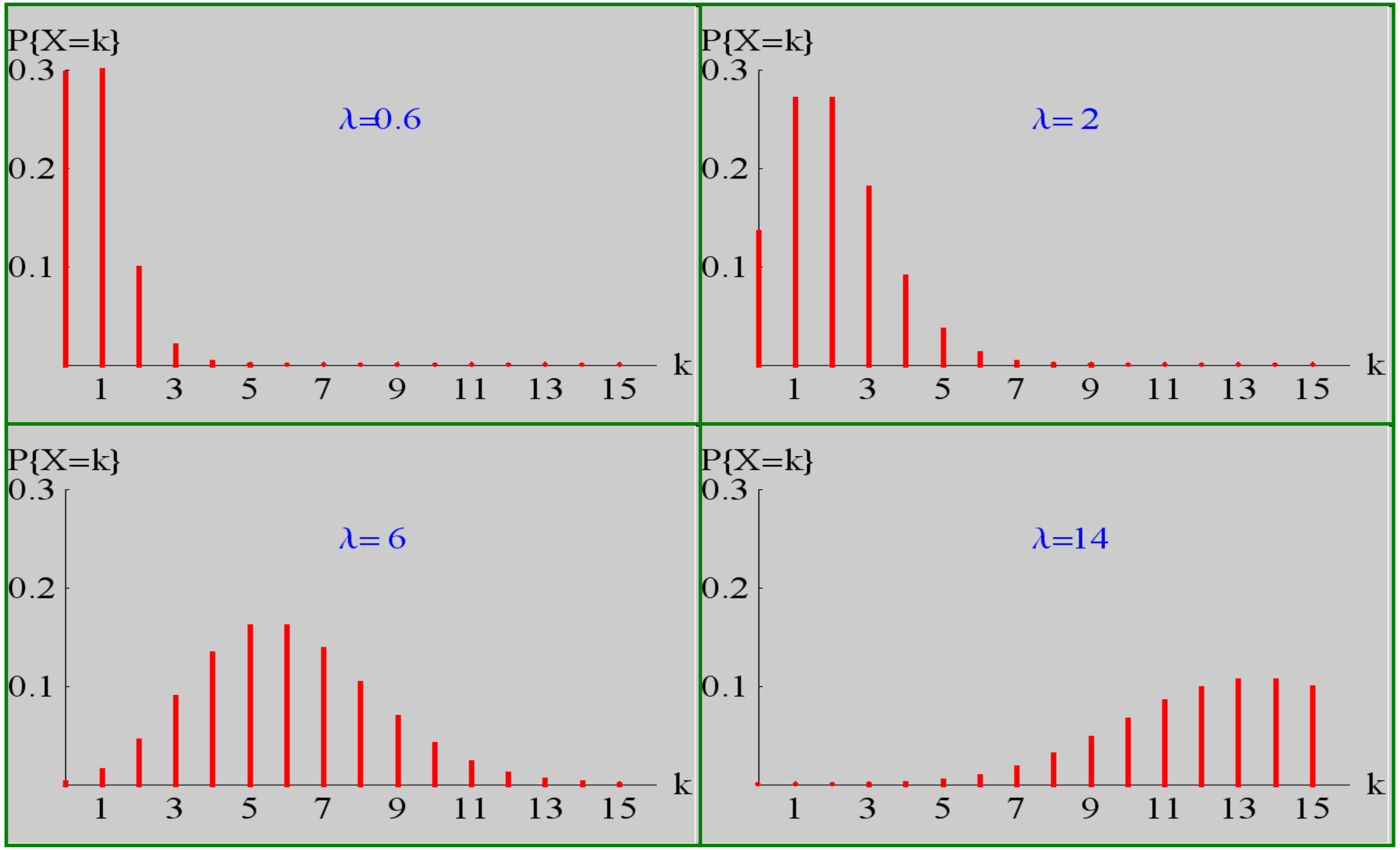
4. 泊松分布

设随机变量所有可能取的值为 $0, 1, 2, \cdots$,而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 是常数.则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布,记为 $X \sim \pi(\lambda)$.

泊松分布的图形



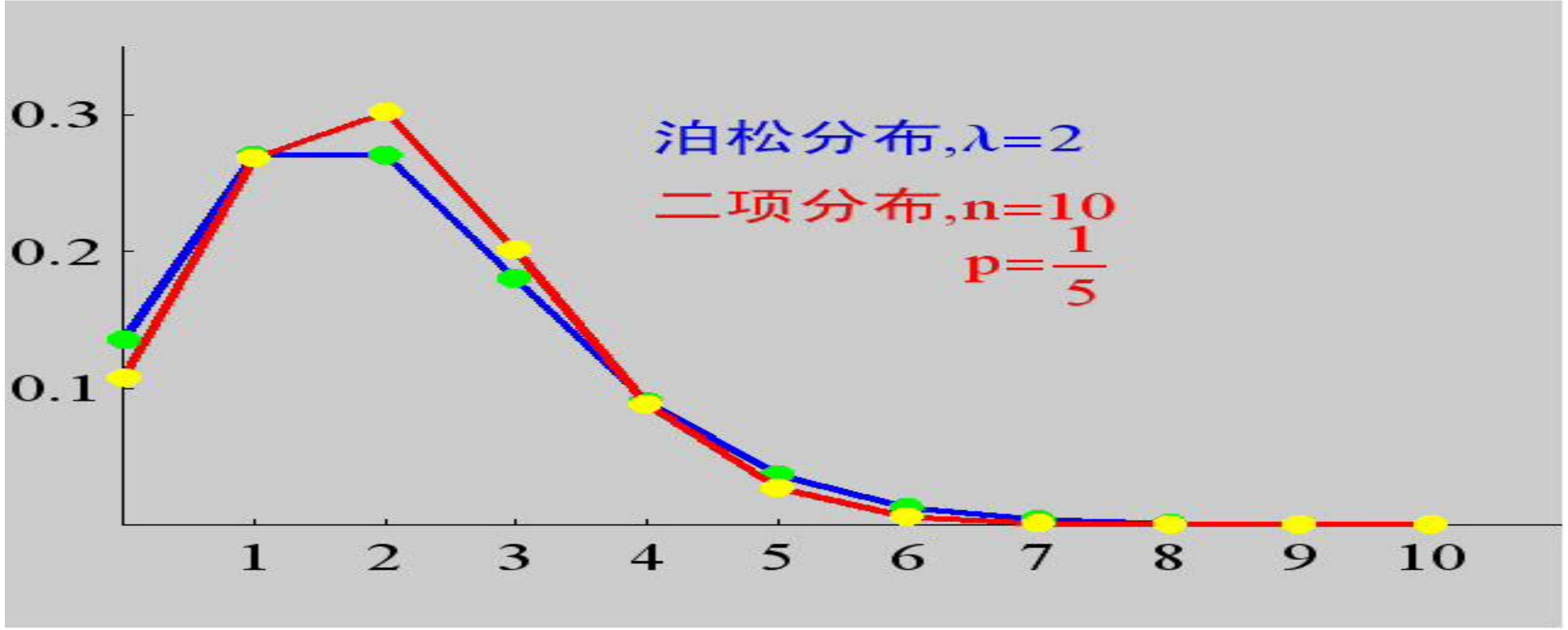
泊松分布的背景及应用

二十世纪初卢瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的粒子个数的情况时，他们做了2608次观察（每次时间为7.5秒），发现放射性物质在规定的一段时间内，其放射的粒子数X服从泊松分布.

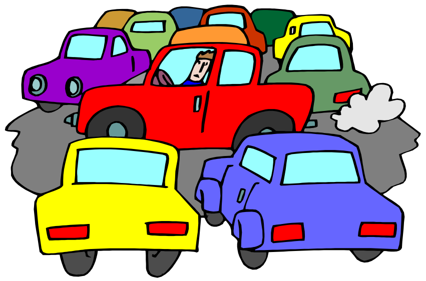
在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的。例如地震、火山爆发、特大洪水、某地区一个时间间隔内发生的交通事故的次数等，都服从泊松分布。

上面我们提到

二项分布 $\xrightarrow{np \to \lambda\ (n \to +\infty)}$ **泊松分布**



例4 有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设每辆汽车，在一天的某段时间内出事故的概率为0.0001，在每天的该段时间内有1000 辆汽车通过，问出事故的次数不小于2的概率是多少？



解 设1000 辆车通过，出事故的次数为 X，则

$$X \sim b(1000, 0.0001),$$

所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

可利用泊松定理计算 $\lambda = 1000 \times 0.0001 = 0.1,$

$$P\{X \geq 2\} \approx 1 - \frac{e^{-0.1}}{0!} - \frac{0.1 \cdot e^{-0.1}}{1!} = 0.0047.$$

合理配备维修工人问题

例5　为了保证设备正常工作, 需配备适量的维修工人 (工人配备多了就浪费 , 配备少了又要影响生产),现有同类型设备300台,各台工作是相互独立的,发生故障的概率都是0.01.在通常情况下,一台设备的故障可由一个人来处理(我们也只考虑这种情况) ,问至少需配备多少工人 ,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01?

解　设需配备 N 人. 记同一时刻发生故障的设备台数为 X, 那么, $X \sim b(300,0.01)$. 所需解决的问题是确定最小的 N，使得

$P\{X \le N\} \ge 0.99.$ 由泊松定理得

$$P\{X \le N\} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k e^{-3}}{k!},$$

故有 $$\sum_{k=0}^{N} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \ge 0.99,$$

查表可求得满足此式最小的N是8. 故至少需配备8个工人,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01.

例6 设有80台同类型设备,各台工作是相互独立的发生故障的概率都是 0.01,且一台设备的故障能由一个人处理. 考虑两种配备维修工人的方法 , 其一是由四人维护,每人负责20台; 其二是由3人共同维护台80.试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

解 按第一种方法

以X记"第1人维护的20台中同一时刻发生故障的台数", 以$A_i(i=1,2,3,4)$表示事件"第i人维护的20台中发生故障时不能及时维修" , 则知80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1)$$

$$= P\{X \geq 2\}.$$

而 $X \sim b(20,0.01)$, 又 $\lambda = np = 0.2$,

故有 $$P\{X \geq 2\} \approx \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(0.2)^k k^{-0.2}}{k!} = 0.0175.$$

即有 $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq 0.0175.$$

按第二种方法

以Y记80台中同一时刻发生故 障的台数.

则有 $Y \sim b(80,0.01)$,

又 $\lambda = np = 0.8$,

故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geq 4\} \approx \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(0.8)^k k^{-0.8}}{k!} = 0.0091.$$

5. 几何分布

若随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
p_k	p	qp	$\cdots$	$q^{k-1}p$	$\cdots$

$, p+q=1,$

则称 X 服从**几何分布**.

实例 设某批产品的次品率为 p,对该批产品做有放回的抽样检查，直到第一次抽到一只次品为止(在此之前抽到的全是正品),那么所抽到的产品数 X 是一个随机变量，求X 的分布律.

解 X 所取的可能值是 $1, 2, 3, \cdots$.

设 A_i 表示"抽到的第 i 个产品是正品",

$$P\{X=k\}=P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A_k})$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ \cdots\ \cdot P(A_{k-1})\cdot P(\overline{A_k})$$

$$=\underbrace{(1-p)(1-p)\cdot\ \cdots\ \cdot(1-p)}_{(k-1)}\cdot p=q^{k-1}p.$$

所以 X 服从几何分布. $(k=1,2,\cdots)$

说明 几何分布可作为描述某个试验 "**首次成功**"的概率模型.

三、小结

离散型随机变量的分布

- 两点分布
- 均匀分布
- 二项分布
- 泊松分布
- 几何分布

两点分布

$\uparrow$ $n=1$

二项分布

$\downarrow$ $n>10, p<0.1$

泊松分布

2. 二项分布与 $(0-1)$ 分布、泊松分布之间的关系.

二项分布是 $(0-1)$ 分布的推广，对于 n 次独立重复伯努里试验，每次试验成功的概率为 p，设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次试验成功} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次试验失败} \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

它们都服从 $(0-1)$ 分布并且相互独立，那末 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 服从二项分布，参数为 (n, p).

以 $n, p\ (np=\lambda)$ 为参数的二项分布,当 $n\to\infty$ 时趋于以 λ 为参数的泊松分布,即

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}\mathrm{e}^{-np},$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n).$$

第三节　　随机变量的分布函数

一、分布函数的概念

二、分布函数的性质

三、例题讲解

四、小结

一、分布函数的概念

1.概念的引入

对于随机变量*X*, 我们不仅要知道*X* 取哪些值, 要知道 *X* 取这些值的概率 ; 而且更重要的是想知道 *X* 在任意有限区间(*a*,*b*)内取值的概率.

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 内的概率.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \boxed{P\{X \le x_2\}} - \boxed{P\{X \le x_1\}}$$

$$F(x_2) \qquad ? \qquad F(x_1)$$

分布函数

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

2.分布函数的定义

定义　设 X 是一个随机变量,x是任意实数,函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为X的分布函数.

说明

(1) 分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

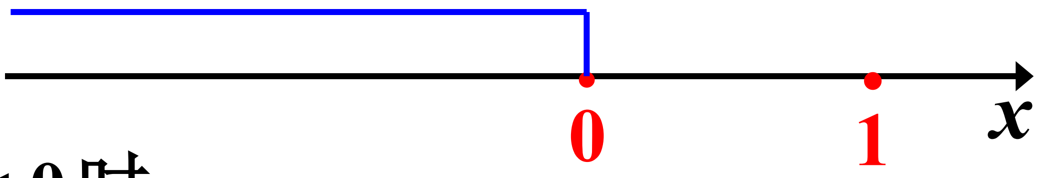
(2)分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

实例　抛掷均匀硬币，令

$$X=\begin{cases}1, & \text{出正面,}\\ 0, & \text{出反面.}\end{cases}$$

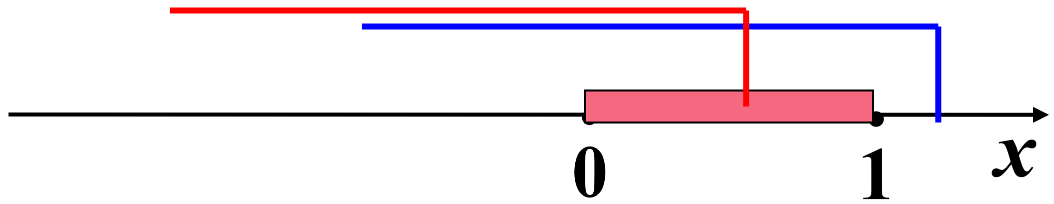
求随机变量 X 的分布函数.

解　$p\{X=1\}=p\{X=0\}=\dfrac{1}{2},$



当 $x<0$ 时,

$$F(x)=P\{X\le x<0\}=0;$$



当$0 \le x < 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当$x \ge 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

二、分布函数的性质

$(1)\ 0 \le F(x) \le 1, \quad x \in (-\infty, \infty);$

$(2)\ F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2);$

证明 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\},$

得 $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\},$

又 $F(x_1) = P\{X \le x_1\}, \quad F(x_2) = P\{X \le x_2\},$

故 $F(x_1) \le F(x_2).$

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1;$

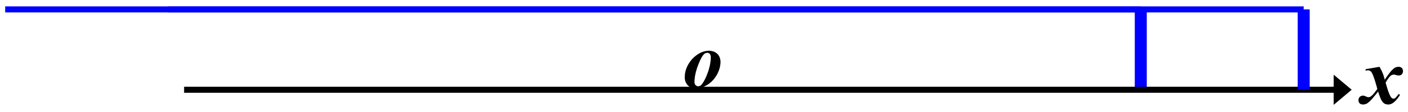
证明　$F(x)=P\{X\le x\}$, 当 x 越来越小时,

$P\{X\le x\}$的值也越来越小,因而当 $x\to-\infty$时,有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}P\{X\le x\}=0$$

同样,当 x 增大时 $P\{X\le x\}$的值也不会减小,而

$X\in(-\infty,x)$, 当 $x\to\infty$时, X 必然落在$(-\infty,\infty)$内.



所以　$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}P\{X\le x\}=1.$

（4） 分布函数F(x)是右连续的.

若函数在某点的右极限存在且等于该点的函数值，则函数在该点右连续。

重要公式

$$(1)\ P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2)\ P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

三、例题讲解

例1 将一枚硬币连掷三次, X 表示“三次中正面出现的次数”, 求 X 的分布律及分布函数, 并求下列概率值 $P\{1 < X < 3\}, P\{X \geq 5.5\}, P\{1 < X \leq 3\}$.

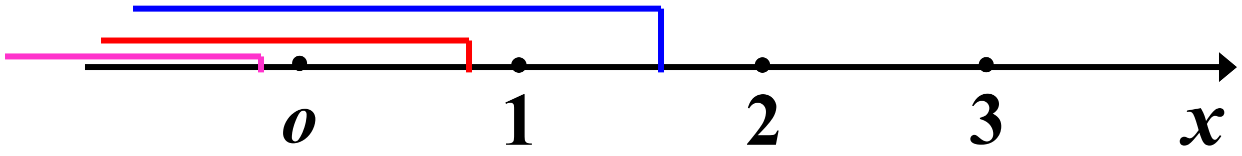
解 设 H – 正面, T – 反面, 则

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

求分布函数



当 $x < 0$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$$

当 $0 \le x < 1$时,

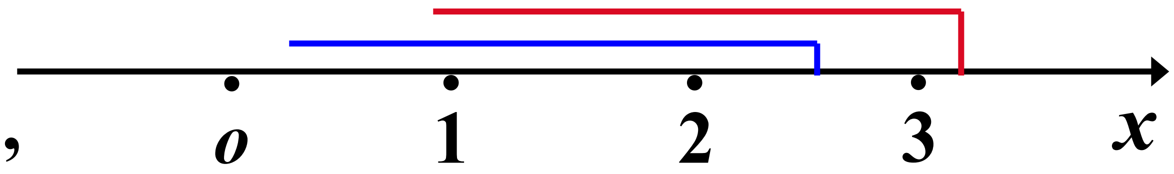
$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \sum_{x_i \le 0} p_i = \frac{1}{8};$$

当 $1 \le x < 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \sum_{x_i \le 1} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$

当 $2 \le x < 3$时,



$$F(x) = P\{X \le x\}$$
$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \le 2} p_i$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

当 $x \ge 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$
$$+ P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$
$$= \sum_{x_i \le 3} p_i = 1.$$

$$
\text{所以} F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \le x < 1, \\ 4/8, & 1 \le x < 2, \\ 7/8, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{1 < X < 3\} &= P\{X \le 3\} - P\{X \le 1\} - P\{X = 3\} \\
&= F(3) - F(1) - P\{X = 3\} \\
&= 1 - \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

$$P\{X \geq 5.5\} = 1 - P\{X < 5.5\}$$

$$= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\}$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0.$$

$$P\{1 < X \leq 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\}$$

$$= F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

例2 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数,并求 $P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$,

$P\{2 \le X \le 3\}$.

解 由于 X 仅在 $x = -1, 2, 3$ 处概率不为0, 且

$$F(x) = P\{X \le x\},$$

得 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ P\{X=-1\}, & -1\le x<2,\\ P\{X=-1\}+P\{X=2\}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{4}, & -1\le x<2,\\ \dfrac{3}{4}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

由 $F(x) = P\{X \le x\}$,

得 $P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

请同学们思考

不同的随机变量,它们的分布函数一定也不相同吗?

答 不一定. 例如抛均匀硬币, 令

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{出正面}; \\ -1, & \text{出反面}. \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} -1, & \text{出正面}; \\ 1, & \text{出反面}. \end{cases}$$

X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法则不同,是两个不同的随机变量,但它们却有相同的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ 1/2, & -1 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律 $p_k = P\{X = x_k\}$

$\Updownarrow$

分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$

例3 一个靶子是半径为2m的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比,并设射击都能中靶,以*X*表示弹着点与圆心的距离.试求随机变量 *X* 的分布函数.

解 当 $x < 0$时,

$P\{X \le x\}$是不可能事件,

于是$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$

当 $0 \le x \le 2$时, $P\{0 \le X \le x\} = kx^2$,$k$是常数.

由 $P\{0 \le X \le 2\} = 1$, 得 $4k = 1$, 即 $k = \dfrac{1}{4}$.

因而$P\{0 \le X \le x\} = \dfrac{x^2}{4}$.

于是

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

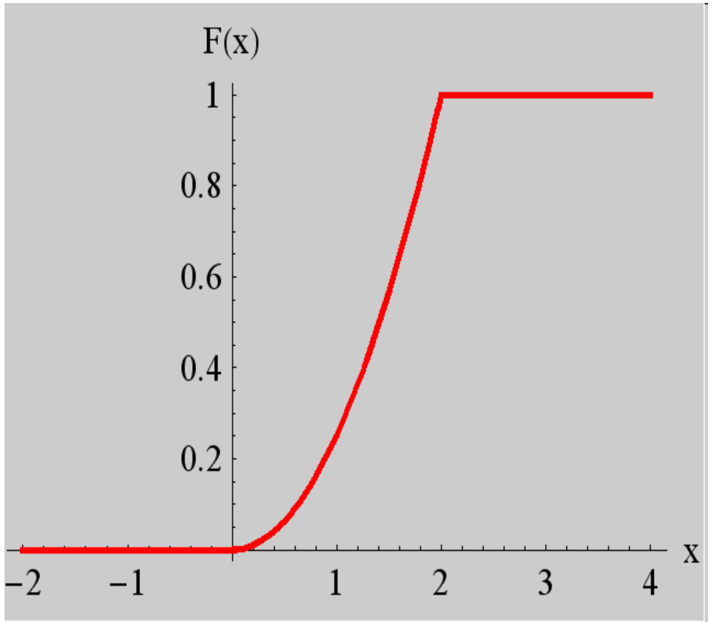
$$= P\{X < 0\} + P\{0 \le X \le x\} = \frac{x^2}{4}.$$

当 $x \ge 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 1.$$

故 *X* 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$



其图形为一连续曲线

若记 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & 0<t<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

$F(x)$ 恰是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分,

此时称 X 为连续型随机变量.

注意 两类随机变量的分布函数图形的特点不一样.

四、小结

1.离散型随机变量的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}p_k.$$

2.分布律与分布函数的关系

第四节　连续型随机变量及其概率密度

一、概率密度的概念与性质

二、常见连续型随机变量的分布

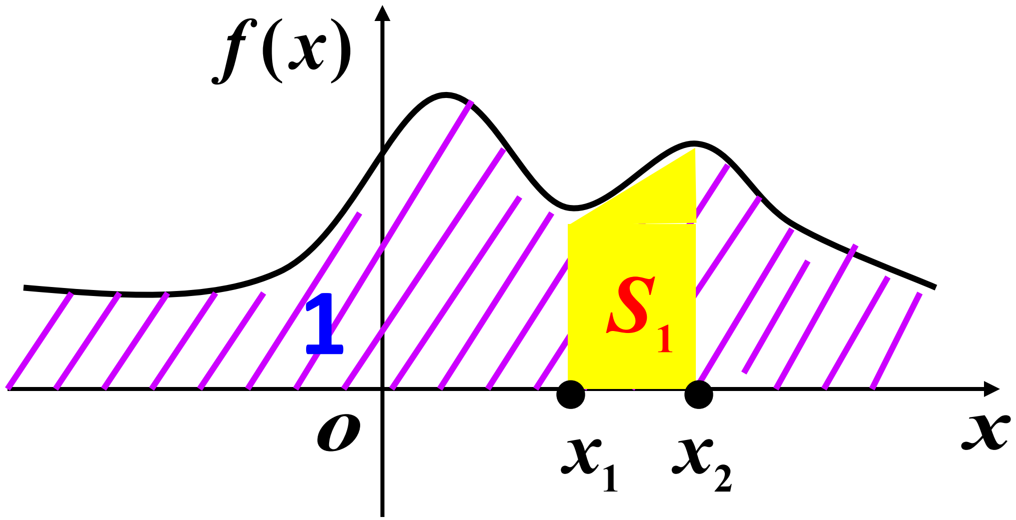
三、小结

一、概率密度的概念与性质

1.定义 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负可积函数$f(x)$，使对于任意实数 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，则称 X 为连续型随机变量，其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$S_1=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$



性质 (1) $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

证明 $1 = F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同时得以下计算公式

$$P\{X \le a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{-\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续,则有 $F'(x) = f(x)$.

注意 对于任意可能值 a ,连续型随机变量取 a 的概率等于零.即

$$P\{X=a\}=0.$$

证明 $P\{X=a\}=\lim_{\Delta x\to 0}\int_a^{a+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

由此可得

$$\boxed{\begin{aligned}P\{a\le X\le b\}&=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X<b\}\\&=P\{a<X<b\}.\end{aligned}}$$

连续型随机变量取值落在某一区间的概率与区间的开闭无关

注意

若X是连续型随机变量，{ $X=a$ }是不可能事件，则有 $P\{X=a\}=0.$

若 $P\{X=a\}=0,$

则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量,

$\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0.$

离散型

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0 \le x < 3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k; (2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1 < X \le \dfrac{7}{2}\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

得 $\int_0^3 kx\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x = 1$，解之得 $k = \frac{1}{6}$.

(2) 由 $k = \frac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \le x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ 得

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x \frac{x}{6}\,\mathrm{d}x, & 0 \le x < 3, \\ \int_0^3 \frac{x}{6}\,\mathrm{d}x+\int_3^x (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x, & 3 \le x < 4, \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(1)=\frac{41}{48}.$

二、常见连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

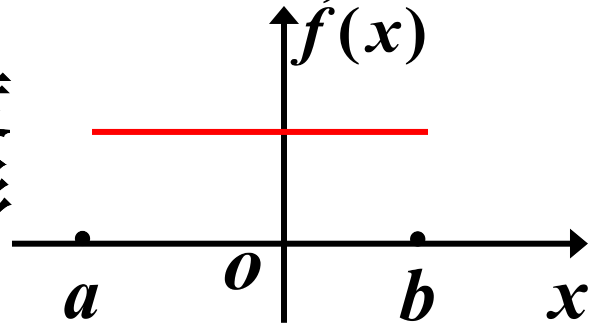
定义 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 区间上服从均匀分布,

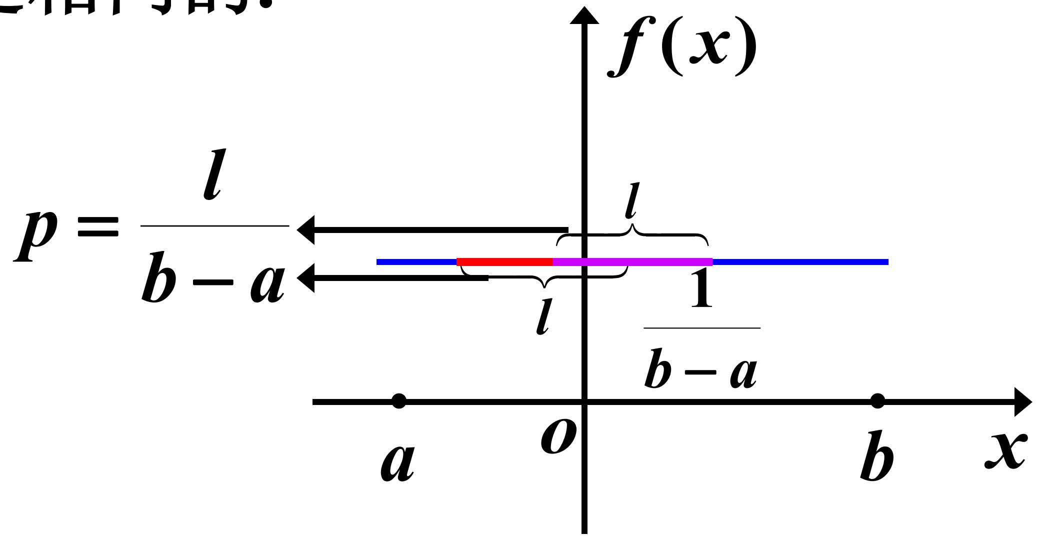
记为 $X\sim U(a,b)$.

概率密度函数图形



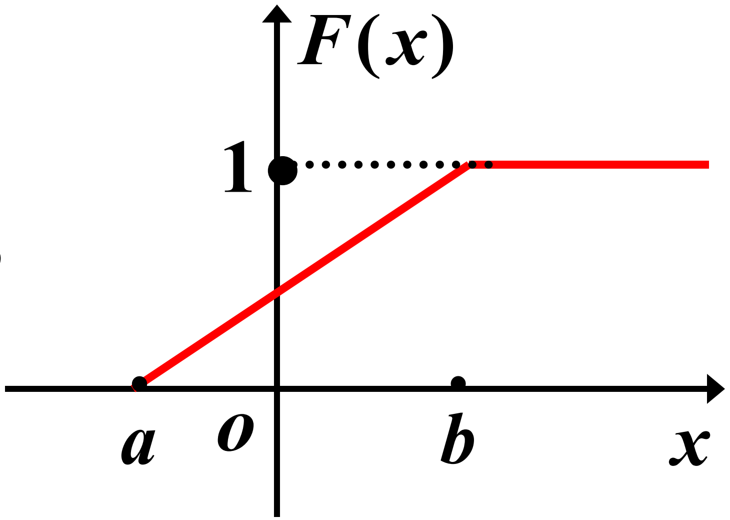
均匀分布的意义

在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量X，落在区间(a,b)中任意等长度的子区间内的可能性是相同的.



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



例3 设电阻值 R 是一个随机变量，均匀分布在 $900\,\Omega \sim 1100\,\Omega$．求 R 的概率密度及 R 落在 $950\,\Omega \sim 1050\,\Omega$ 的概率.

解 由题意,R 的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}1/(1100-900), & 900 < r \le 1100,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故有 $$P\{950 < R \le 1050\}=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}\,\mathrm{d}r = 0.5.$$

例4 设随机变量 *X* 在 [2, 5]上服从均匀分布, 现对 *X* 进行三次独立观测 ,试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 *X* 的分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 *A* 表示“对 *X* 的观测值大于 3 ”,

即 *A*={ *X* >3 }.

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

设Y表示3次独立观测中观测值大于3的次数,

则 $$Y\sim b\left(3,\frac{2}{3}\right).$$

因而有

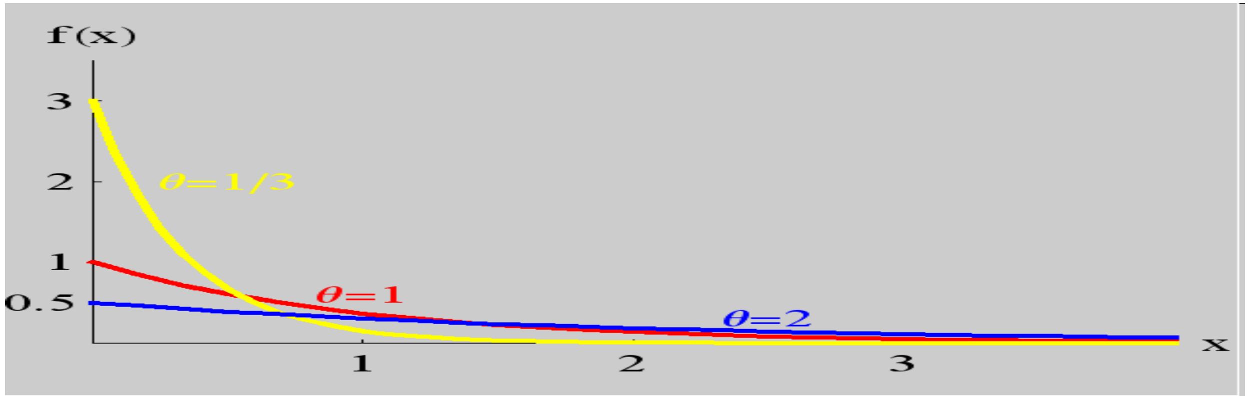
$$P\{Y\geq 2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{20}{27}.$$

2. 指数分布

定义　设连续型随机变量 X 的概率密度为

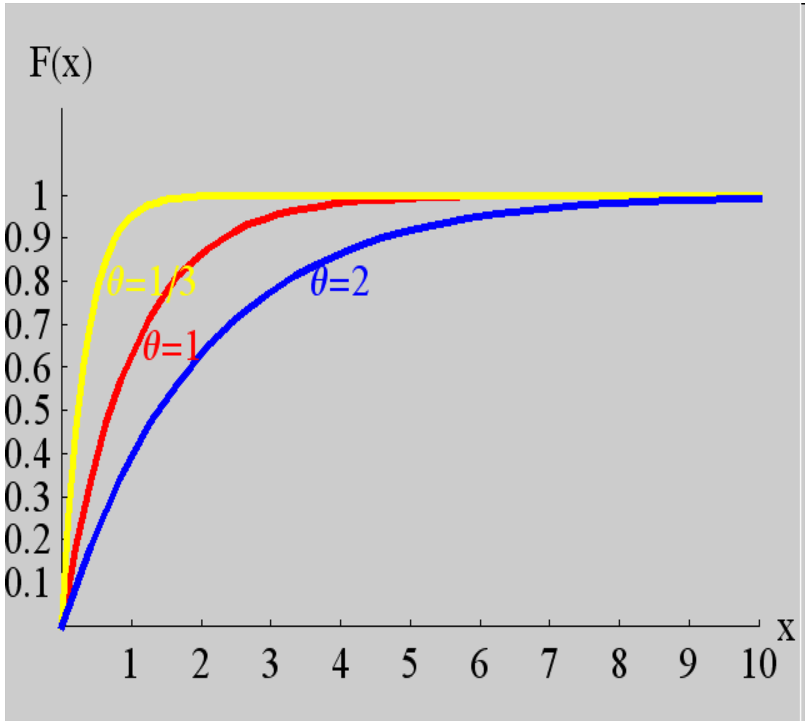
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 θ 的指数分布.



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$



应用与背景

某些元件或设备的寿命服从指数分布.例如无线电元件的寿命 、电力设备的寿命、动物的寿命等都服从指数分布.

例5 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $\vartheta=2000$ 的指数分布(单位:小时).

(1)任取一只这种灯管, 求能正常使用1000小时以上的概率.

(2) 有一只这种灯管已经正常使用了1000 小时以上,求还能使用1000小时以上的概率.

解 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$(1)\ P\{X>1000\}=1-P\{X\le 1000\}$$

$$=1-F(1000)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0.607.$$

$$(2)\ P\{X>2000 \mid X>1000\}$$

$$=\frac{P\{X>2000, X>1000\}}{P\{X>1000\}}$$

$$=\frac{P\{X>2000\}}{P\{X>1000\}}$$

$$= \frac{1 - P\{X \le 2000\}}{1 - P\{X \le 1000\}}$$

$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

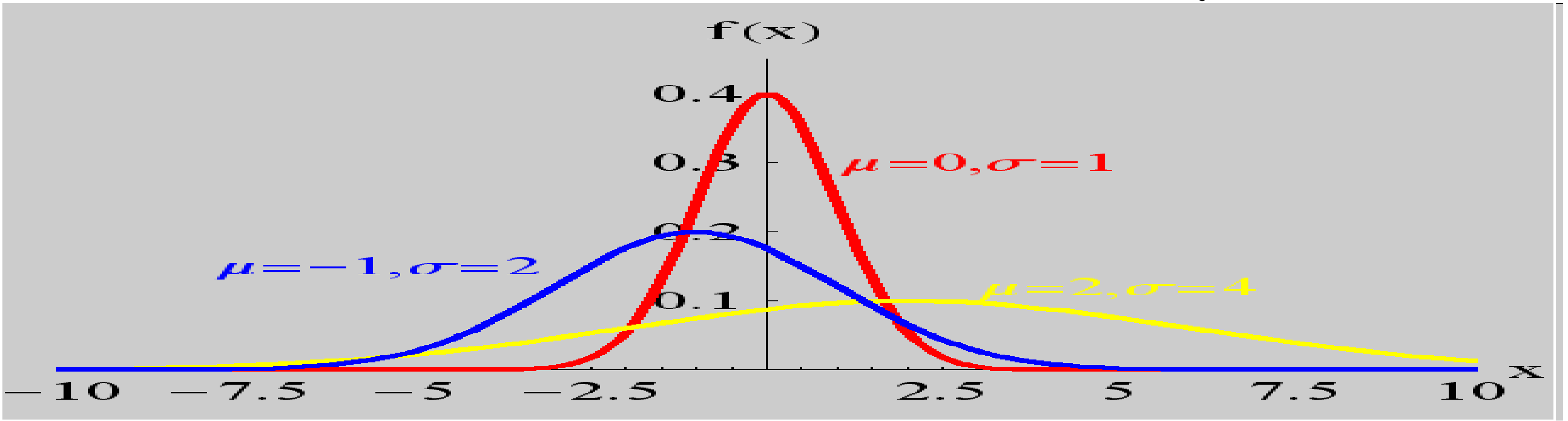
指数分布的重要性质 :“无记忆性” .

3. 正态分布(或高斯分布)

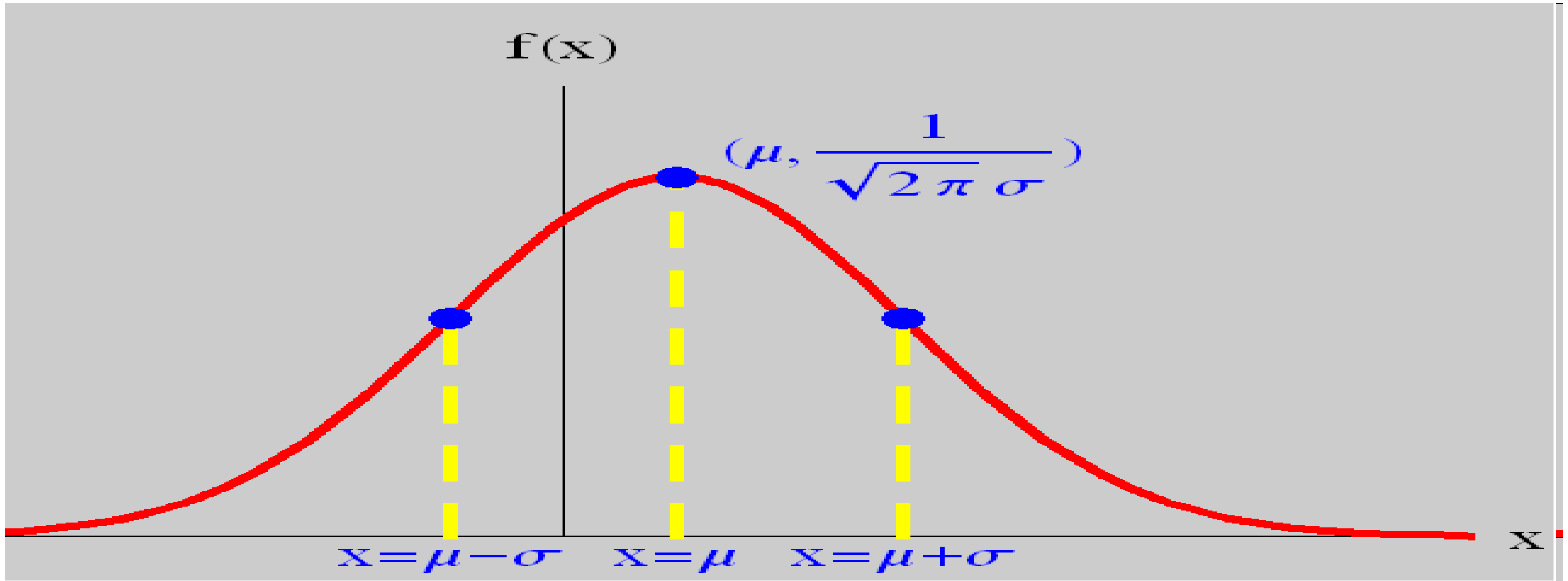
定义　设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数,则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯分布,记为　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



正态概率密度函数的几何特征



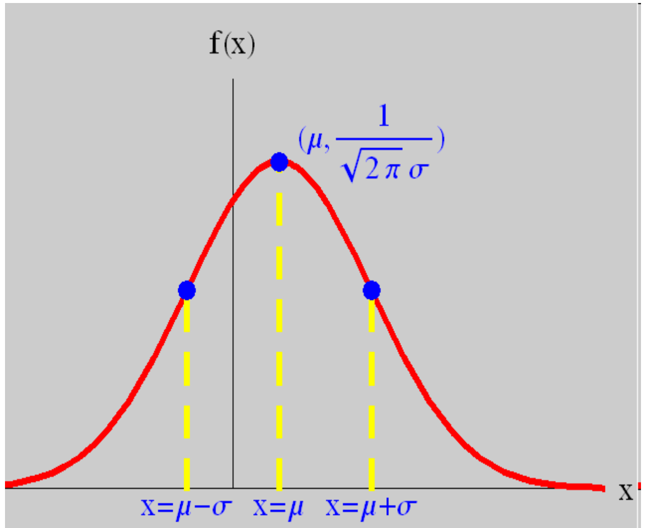
(1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称;

(2) 当$x=\mu$时, $f(x)$取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

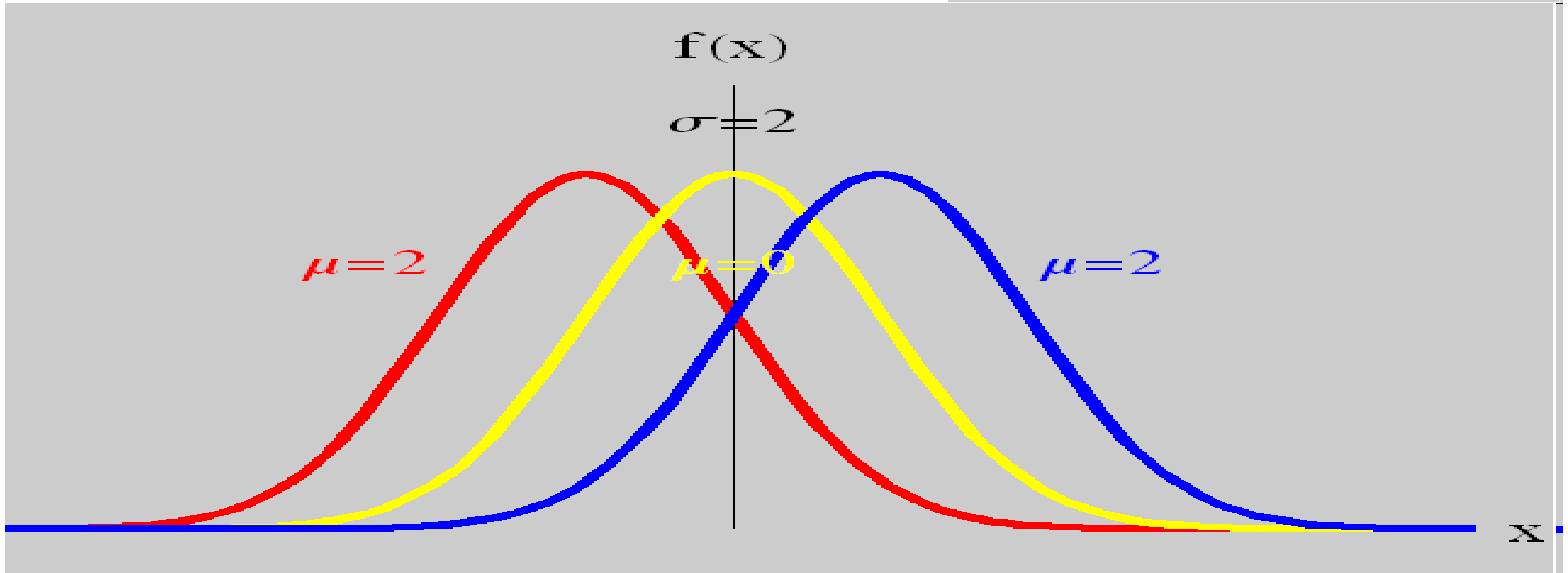
(3) 当 $x\to\pm\infty$ 时, $f(x)\to 0$;

(4) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;

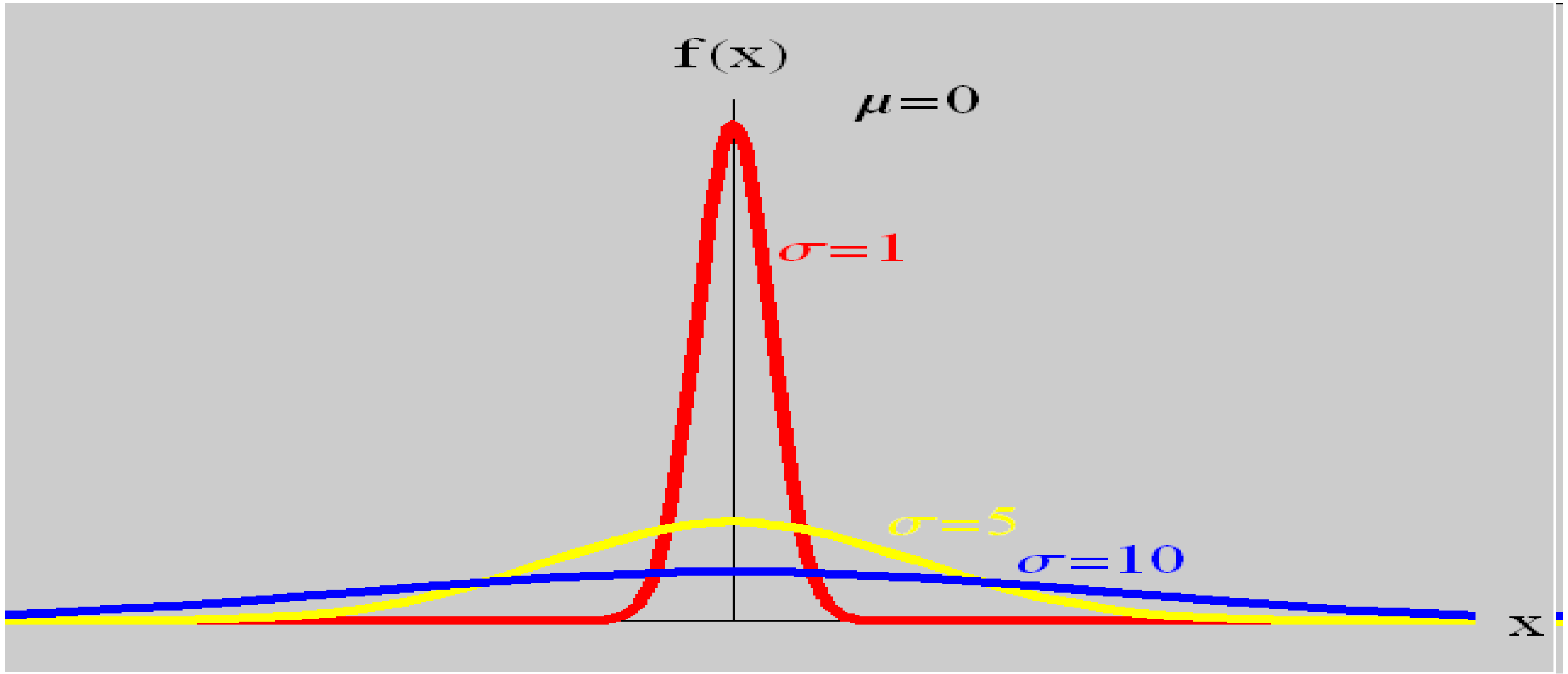
(5) 曲线以 x 轴为渐近线;



(6) 当固定 σ, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 图形的形状不变, 只是沿着 x 轴作平移变换;

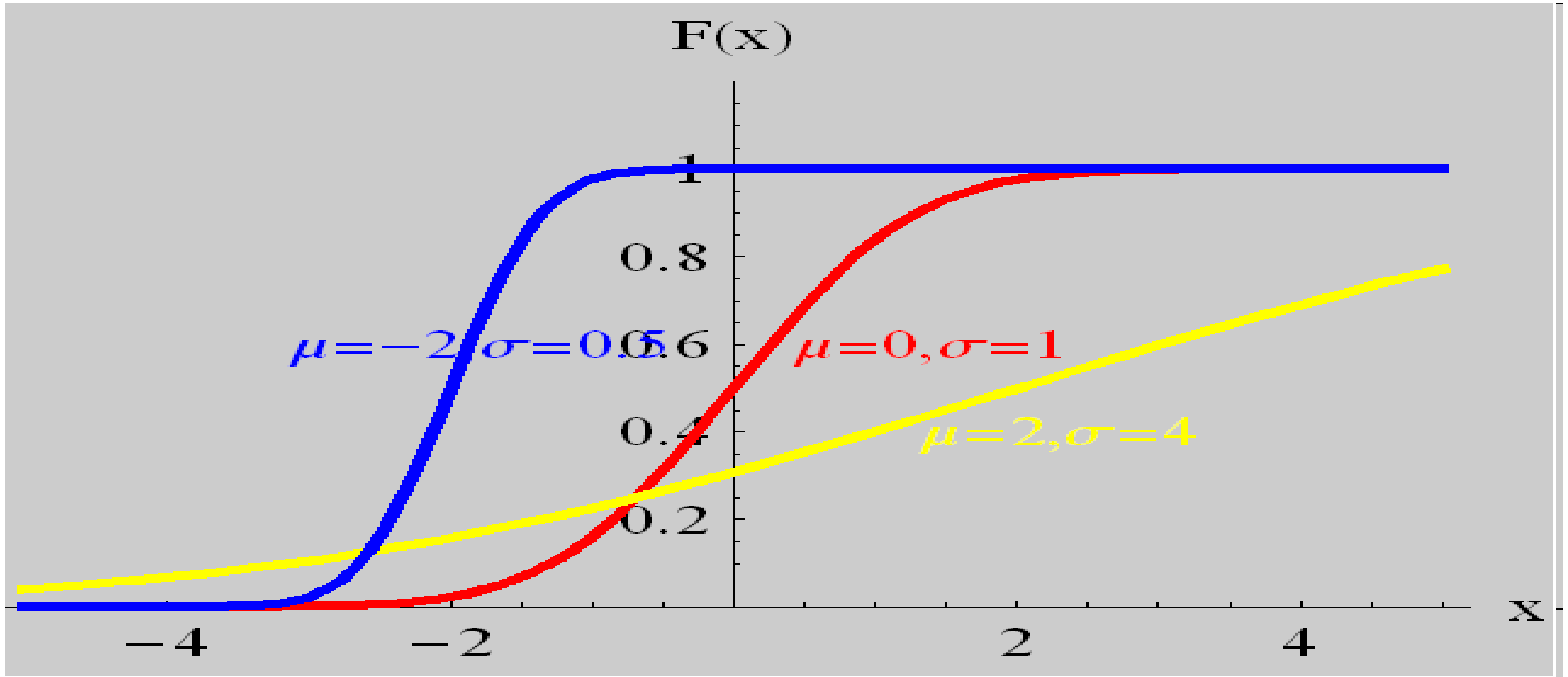


(7) 当固定 μ, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变,而形状在改变, σ 越小,图形越高越瘦,σ越大,图形越矮越胖.



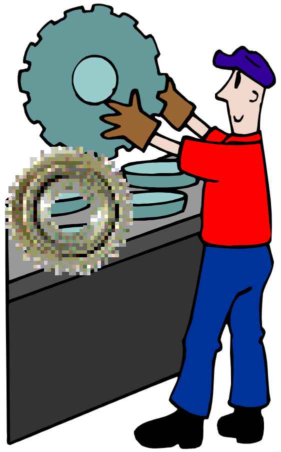
正态分布的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$



正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布,例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等；正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.



正态分布下的概率计算

$$P\{X \le x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\boxed{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t}$$

$$= ?$$

方法一:利用MATLAB软件包计算

方法二:转化为标准正态分布查表计算

标准正态分布

当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\sigma=1$ 时,这样的正态分布称为标准正态分布,记为 $N(0,1)$.

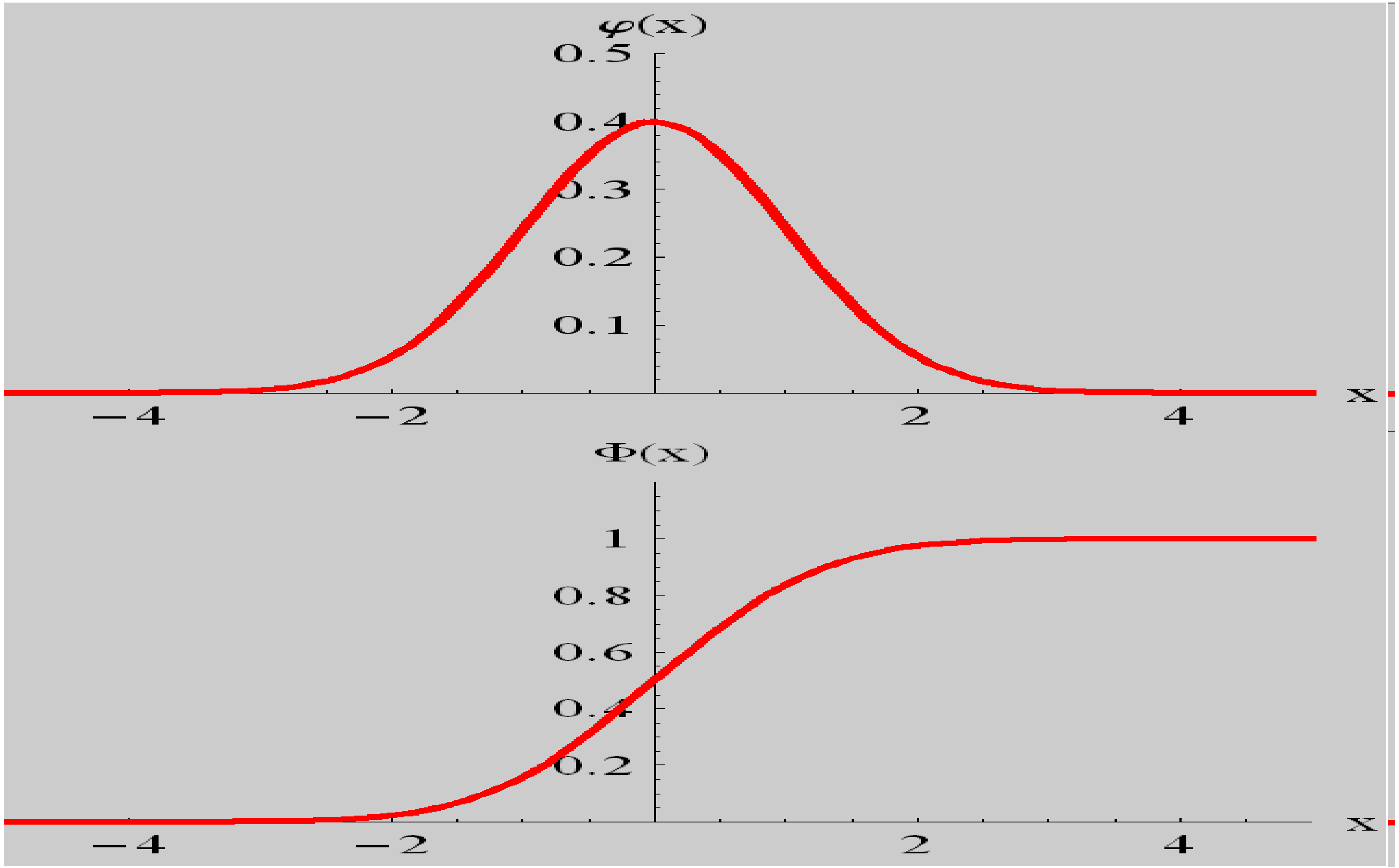
标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\quad -\infty<x<\infty.$$

标准正态分布的图形



例6 已知 $X \sim N(0,1)$,求 $P\{1.25 \le X < 2\}$.

解 $P\{1.25 \le X < 2\}$

$= \Phi(2) - \Phi(1.25)$

$= 0.9772 - 0.8944$

$= 0.0828.$

引理 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证明 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为

$$P\{Z \le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right\}=P\{X \le \mu+\sigma x\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt,$$

令$\dfrac{t-\mu}{\sigma}=u$,得 $P\{Z \le x\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=\Phi(x)$,

故 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则它的分布函数$F(x)$可写成 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

例7 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求 $P\{c \le X \le d\}$.

$$P\{c \le X \le d\} = F(d) - F(c)$$

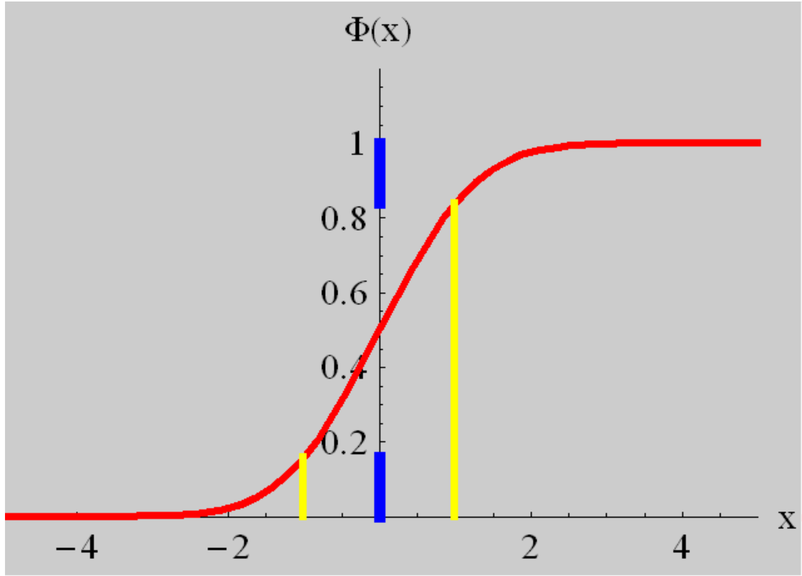
$$= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

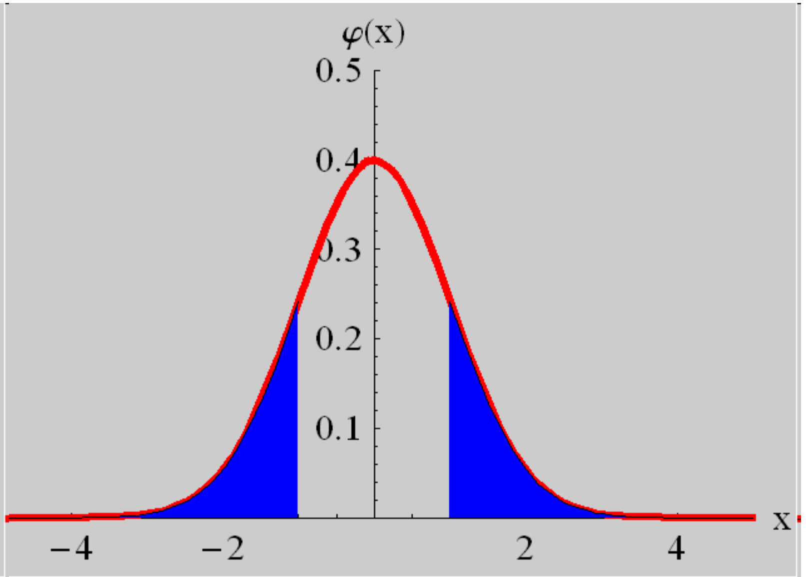
例8 证明 $\Phi(-x)=1-\Phi(x).$

证明 $\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$$=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=1-\Phi(x).$$





例9 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在 $d^{\circ}C$, 液体的温度 X(以$^{\circ}C$计)是一个随机变量, 且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若$d=90$, 求 X 小于 89 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 $80^{\circ}C$ 的概率不低于 0.99, 问d至少为多少?

解 (1) 所求概率为

$$P\{X<89\}=\Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)$$

$$=1-0.9772=0.0228.$$

$$(2)\quad P\{X > 80\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - P\{X \leq 80\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - F(80) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right) \geq 0.99$$

即 $\dfrac{d-80}{0.5} \geq 2.33 \qquad \Rightarrow d \geq 81.16.$

三、小结

1. 连续型随机变量 $\underbrace{F(x)}_{\text{分布函数}} = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{\text{概率密度}} \mathrm{d}t$

2. 常见连续型随机变量的分布

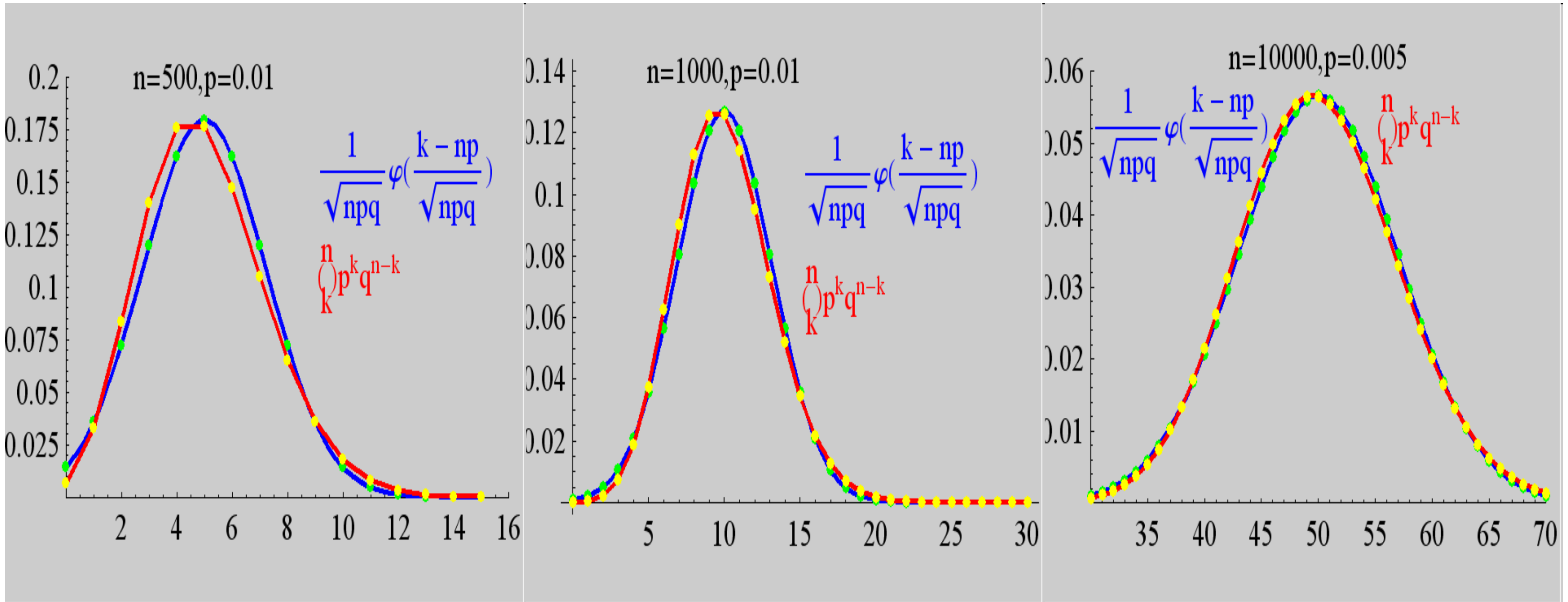
$$\begin{cases} \text{均匀分布} \\ \text{指数分布} \\ \text{正态分布(或高斯分布)} \end{cases}$$

3. 正态分布是概率论中最重要的分布

正态分布有极其广泛的实际背景, 例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等 ,正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度,炮弹的弹落点的分布等, 都服从或近似服从正态分布.可以说,正态分布是自然界和社会现象中最为常见的一种分布, 一个变量如果受到大量微小的、独立的随机因素的影响, 那么这个变量一般是一个正态随机变量.

另一方面,有些分布(如二项分布、泊松分布)的极限分布是正态分布.所以,无论在实践中,还是在理论上,正态分布是概率论中最重要的一种分布.

二项分布向正态分布的转换



第五节 随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量的函数的分布

二、连续型随机变量的函数的分布

三、小结

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数，若随机变量 Y 随着 X 取值 x 的值而取 $y = f(x)$ 的值，则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数，记作 $Y = f(X)$.

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量$Y = f(X)$的分布？

例1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y = X^2$ 的分布律.

解 Y 的可能值为 $(-1)^2,\ 0^2,\ 1^2,\ 2^2;$

即 $0,\ 1,\ 4.$

$$P\{Y=0\} = P\{X^2=0\} = P\{X=0\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{(X=-1)\cup(X=1)\}$$

$$=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.

离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $g(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

例2 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

二、连续型随机变量的函数的分布

例3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解 第一步 先求*Y*=2*X*+8 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$= P\{X \le \frac{y-8}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步　由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F'_y(y)$$

$$= [\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x]'$$

$$= f_X(\frac{y-8}{2})(\frac{y-8}{2})',$$

所以 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}, & 0<\dfrac{y-8}{2}<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3 e^{-x^2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 和 $Y=2X+3$ 的概率密度.

解 先求随机变量 $Y=X^2$ 分布函数,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}\}$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

再由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y})^3 \cdot \mathrm{e}^{-(\sqrt{y})^2} + 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y\mathrm{e}^{-y}}{2}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

当 *Y*=2*X*+3 时,有

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2},$$

$$f_Y(y) = F_y'(y) = [\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x]'$$

$$= \begin{cases} (\frac{y-3}{2})^3 \mathrm{e}^{-(\frac{y-3}{2})^2} (\frac{y-3}{2})', & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^{3}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^{2}}, & y\geq 3,\\ 0, & y<3.\end{cases}
$$

由上述例题可归纳出计算连续型随机变量的函数的概率密度的方法.

定理 设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中$-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$处处可导, 且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$), 则称$Y = g(Y)$是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中$\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

例5 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \dfrac{1}{a} \neq 0$.

由公式 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

得 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty<y<\infty.$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty<y<\infty.$$

得 $Y=aX+b$

$\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$

例6 设电压 $V = A\sin\Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数,相角 Θ 是一个随机变量,且有 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 试求电压 V 的概率密度.

解 因为 $v = g(\theta) = A\sin\theta$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上恒有

$$g'(\theta) = A\cos\theta > 0,$$

所以反函数为 $\theta = h(v) = \arcsin\frac{v}{A}$,

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$

又由$\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,知$\Theta$的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由定理得$V=A\sin\Theta$的概率密度为

$$\varphi(v)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}, & -A<v<A,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

三、小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

若 $Y = g(X)$ 且 X 的分布律为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y = g(X)$的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

2. 连续型随机变量的函数的分布

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$

$$= \int_{g(x)\le y} f_X(x)\,\mathrm{d}x, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

方法2

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意条件.