《概率论与数理统计》第五周要点

复习要点：随机变量及其分布

1. 随机变量与分布律

- 随机变量分为 **离散型**和 **连续型**。
- 离散型随机变量通过 **分布律**（概率质量函数）描述：

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad \sum_k p_k = 1.$$

- 典型分布：二项分布、泊松分布（作为二项分布近似，当 n 大、p 小）。

2. 分布函数

- 定义：

$$F(x) = P\{X < x\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- 性质：
  1. $F(x)$ 单调不减；
  2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$；
  3. $F(x)$ 右连续。
- 离散型分布函数呈阶梯状；连续型分布函数为连续函数。

3. 连续型随机变量与概率密度

- 若存在非负可积函数 $f(x)$，使

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

  则称 $f(x)$ 为 **概率密度函数 (PDF)**。
- 性质：
  1. $f(x) \geq 0$；
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$；
  3. $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\, dx$；
  4. $P\{X = a\} = 0$。

4. 三类重要的连续分布

(1) 均匀分布 $U(a,b)$ 概率密度：

$$f(x)=\frac{1}{b-a},\quad a<x<b.$$

分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

(2) 指数分布 $Exp(\lambda)$ 概率密度：

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad x>0.$$

分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

性质：具有无记忆性

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}.$$

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 概率密度：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

分布函数：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt,$$

没有解析解，只能通过数值方法或查表。特殊情形：标准正态分布 $N(0,1)$，分布函数记为 $\Phi(z)$。

“三 σ 法则”：

$$P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}\approx 68.26\%,$$

$$P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}\approx 95.44\%,$$

$$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}\approx 99.74\%.$$

5. 标准正态分布表的使用

- 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，做标准化：

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma},\quad Z\sim N(0,1).$$

- 有：
$$P\{X \le x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$
其中 $\Phi(z)$ 为标准正态分布函数。

- 区间概率：
$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

- 查表步骤：
  1. 计算 $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$；
  2. 在标准正态分布表中查 $\Phi(z)$；
  3. 若 $z < 0$，利用对称性 $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$。

- 例：若 $X \sim N(90, 0.5^2)$，求 $P\{X < 89\}$，则
$$z = \frac{89-90}{0.5} = -2,$$
查表得 $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$。