《概率论与数理统计》第六周要点

复习要点：§5 随机变量的函数的分布

1. 问题背景与目标

在实际问题中，我们常关心某个随机变量的函数形式。例如：圆的面积 $Y = \pi R^2$，而随机变量 R 的分布已知。目标：根据已知随机变量 X 的分布，求 $Y = g(X)$ 的分布规律。

—

2. 离散型随机变量函数的分布

若 X 为离散型随机变量，$Y = g(X)$ 为其函数，则

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{x_i : g(x_i) = y_j} P\{X = x_i\}.$$

例 1： X 的分布律为

$$X : -1, 0, 1, 2; \quad P(X = x) = 0.2, 0.3, 0.1, 0.4.$$

若 $Y = (X-1)^2$，则 Y 的可能取值为 $0, 1, 4$，其分布律为

$$P(Y = 0) = 0.1, \quad P(Y = 1) = 0.7, \quad P(Y = 4) = 0.2.$$

—

3. 连续型随机变量函数的分布——一般原理

若 $Y = g(X)$，且 g 为可导的连续函数，需先求 Y 的分布函数：

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}.$$

再对 $F_Y(y)$ 求导即可得到概率密度函数 $f_Y(y)$。

—

4. 连续型随机变量函数的分布——单调变换法

若 X 具有密度 $f_X(x)$，且 $g(x)$ 在定义域上严格单调、可导，则 $Y = g(X)$ 为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X\big(g^{-1}(y)\big) \left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|, \quad a < y < b,$$

其中 $[a, b] = g$(取值范围)。这是随机变量变换法则。

—

5. 连续型函数分布的典型例题

例 2：线性变换 $Y = aX + b$ 若 X 连续，$f_X(x)$ 已知，则

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad Y = aX + b.$$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$。

例 3：正弦变换 $Y = A\sin\Theta$ 若 $\Theta \sim U(-\pi/2, \pi/2)$，则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}, & |y| < A, \\ 0, & |y| \geq A. \end{cases}$$

该分布为电压/振幅类问题常见的“弦密度”型分布。—