第 2 章测试题

姓名：__________ 学号：__________

1. 设随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}a+b/(1+x)^2, & x>0,\\ c, & x\le 0\end{cases}$$

求 a,b,c 的值。

2. 设 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都是分布函数，则下列各个函数中可以作为随机变量的分布函数的是 (　　)。

   A. $F(x)+G(x)$
   B. $2F(x)-G(x)$
   C. $0.3F(x)+0.7G(x)$
   D. $1-F(-x)$

3. 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1，

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{8},\quad P\{X=1\}=\frac{1}{4},$$

在事件“$-1<X<1$”发生的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取之的条件概率与该子区间的长度成正比。试求：

   (a) X 的分布函数 $F(X)$；

   (b) X 取负值的概率 p。

4. 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个设有红绿灯的路口。每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等。以 X 表示该汽车驶过这条街道途中所遇到红灯的个数，求 X 的概率分布和分布函数。

5. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & \text{others},\end{cases}$$

又已知 $P\{X<\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{1}{3}\}$，求：

   (a) 常数 a,b；

   (b) 分布函数 $F(X)$；

(c) $P\{\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\}$。

6. 设随机变量 X 的概率分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{c}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

则 $P\{X > 1\} =$ （　　）。

7. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{5}\right)$（以分钟计）。某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开。他一个月要到银行五次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y \geq 1\}$。

注：指数分布 $\mathrm{Exp}\,(\lambda)$ 的概率密度函数和分布函数分别为：

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0; \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

8. 设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，令

$$Y = \begin{cases} x^2, & x \leq \frac{1}{2}, \\ x, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

求 Y 的分布函数。

第 2 章测试题参考答案

1. **解：** 由 $F(-\infty)=0 \Rightarrow c=0, F(+\infty)=1 \Rightarrow a=1,$ 又 $F(x)$ 在 $x=0$ 右连续，即

$$F(0+0)=F(0) \Rightarrow a+b=c \Rightarrow b=-1.$$

故 $a=1,\ b=-1,\ c=0$。

2. **分布函数的四个基本性质：**

(a) 取值范围：$0 \le F(x) \le 1$；

(b) 单调不减：$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$；

(c) 端点极限：$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$；

(d) 右连续：对任意 x_0，$\lim\limits_{x\downarrow x_0} F(x)=F(x_0)$。

对各选项的分析：

(A) $F(x)+G(x)$：不满足端点极限的规范性，

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x)+G(x)]=\lim_{x\to+\infty}F(x)+\lim_{x\to+\infty}G(x)=1+1=2\neq 1.$$

因此不是分布函数。

(B) $2F(x)-G(x)$：一般不满足单调不减性。即使 F,G 本身单调不减，线性组合 $2F-G$ 也可能在某些区间下降，故不能保证为分布函数。

(C) $0.3F(x)+0.7G(x)$：凸组合保留四个性质——取值仍在 $[0,1]$，保持单调不减，极限仍为 0 与 1，且右连续性在凸组合下也保持。因此 **满足分布函数的四个条件**。

(D) $1-F(-x)$：不一定右连续。给出反例

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\ge 0,\end{cases}$$

则

$$1-F(-x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处有 $\lim\limits_{x\to 0^+}[1-F(-x)]=1,$ 但 $1-F(-0)=1-F(0)=0$，故在 $x=0$ 处不右连续，因而不是分布函数。

结论： 只有 **(C)** 可作为随机变量的分布函数。

3. **解：** 当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；当 $x=-1$ 时，$F(x)=P\{X\le -1\}=1/8$；当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$。

由条件 $P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$。在区间 $(-1,1)$ 内，X 的条件分布为均匀分布，因此：

$$P\{-1<X\le x \mid -1<X<1\}=\frac{x+1}{2},\quad -1<x<1.$$

故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

另外，

$$p=P(X<0)=F(0)=\frac{7}{16}.$$

4. **解：** X 为红灯个数，服从二项分布：

$$X\sim B(3,\tfrac{1}{2}),\quad P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3-k}, k=0,1,2,3.$$

即：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{8}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

5. **解：** (1) 因为 $f(x)=ax+b$ 是概率密度函数，有

$$\int_0^1 (ax+b)\,dx=1\Rightarrow \frac{a}{2}+b=1.\quad (1)$$

又 $P\{X<\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{1}{3}\}$，即

$$\int_0^{1/3}(ax+b)\,dx=\int_{1/3}^1(ax+b)\,dx.$$

计算得

$$\frac{a}{18}+\frac{b}{3}=\frac{4a}{9}+\frac{2b}{3}\Rightarrow a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{4}.$$

故

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 由此积分得分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

(3)

$$P\left\{\tfrac{1}{4}<X<\tfrac{1}{2}\right\}=F(\tfrac{1}{2})-F(\tfrac{1}{4})=\frac{19}{64}.$$

6. **解：** 由归一性条件

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1\Rightarrow c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=ce=1\Rightarrow c=\frac{1}{e}.$$

因此

$$P(X=k)=\frac{e^{-1}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

于是

$$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=\boxed{1-\frac{2}{e}}.$$

7. **解：** 设顾客等待时间 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，其中 $\lambda=\frac{1}{5}$。若超过 10 分钟未等到服务，则离开。

$$P(X>10)=e^{-\lambda\cdot 10}=e^{-2}.$$

每次去银行是否离开相互独立，月内共 5 次，故 $Y\sim B(5,p)$，其中 $p=e^{-2}$。

$$P(Y=k)=\binom{5}{k}(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k},\quad k=0,1,2,\ldots,5.$$

于是

$$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5\approx 0.5167.$$

8. **解：** 令 $X\sim U(0,1)$，并定义分段变换

$$Y=\begin{cases}X^2, & X\le \frac{1}{2},\\ X, & X>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

先给出 Y 与 X 的对应关系曲线（在 $X=\frac{1}{2}$ 处有跳跃）：

由分布函数定义 $F_Y(y)=P(Y\le y)$，分五段讨论即可：

(a) 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$。

(b) 当 $0<y\le\frac{1}{4}$ 时，只有 $X\le\frac{1}{2}$ 的部分满足 $X^2\le y$，即 $X\le\sqrt{y}$，故

$$F_Y(y)=P(0<X\le\sqrt{y})=\sqrt{y}.$$

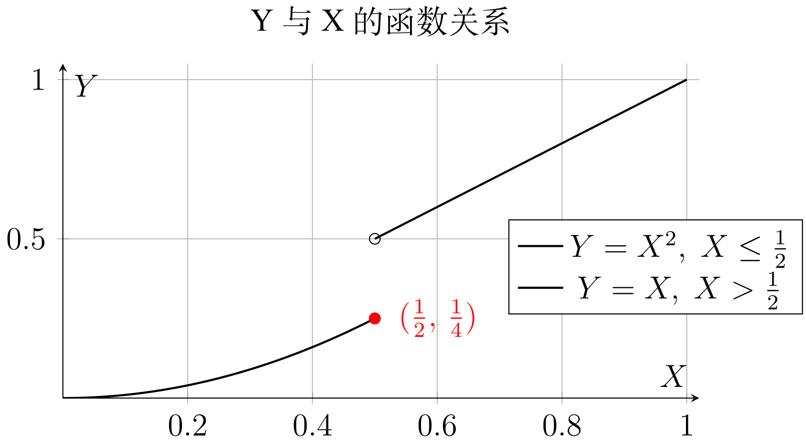

图 1: Y 与 X 的函数关系图，其中 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 为关键点。

(c) 当 $\frac{1}{4} < y \leq \frac{1}{2}$ 时，$X \leq \frac{1}{2}$ 的部分全部满足，而 $X > \frac{1}{2}$ 时无解，故

$$F_Y(y) = P(X \leq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

(d) 当 $\frac{1}{2} < y < 1$ 时，$X \leq \frac{1}{2}$ 的部分概率为 $\frac{1}{2}$，另加上 $X > \frac{1}{2}$ 且 $X \leq y$ 的部分：

$$F_Y(y) = \tfrac{1}{2} + P(\tfrac{1}{2} < X \leq y) = \tfrac{1}{2} + (y - \tfrac{1}{2}) = y.$$

(e) 当 $y \geq 1$ 时，$F_Y(y) = 1$。

因此，

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \sqrt{y}, & 0 < y \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} < y \leq \frac{1}{2}, \\ y, & \frac{1}{2} < y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

由此可见，Y 的取值范围为 $(0, \frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}, 1)$，且在区间 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上分布函数恒为 $\frac{1}{2}$。