第三章 多维随机变量及其分布

研究多维随机变量的必要性

实例1　炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

实例2　考查某一地区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H, W).

说明

二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

第一节　　二维随机变量

一、二维随机变量及其分布函数

二、二维离散型随机变量

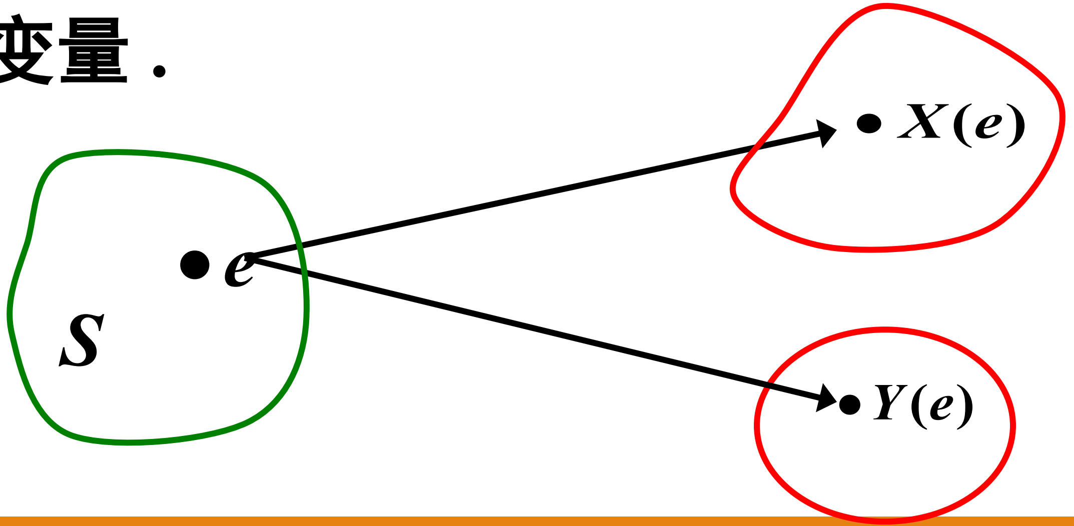
三、二维连续型随机变量

一、二维随机变量及其分布函数

1.定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量 .

图示



实例1　炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

实例2　考查某一地区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H, W).

说明

二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

2.二维随机变量的分布函数

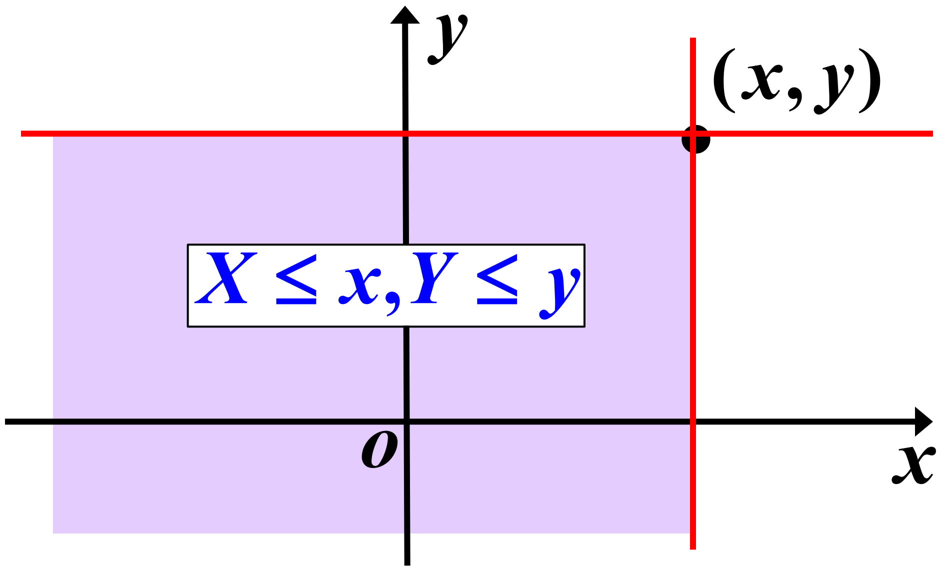
(1)分布函数的定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x,y,二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量X 和 Y 的联合分布函数.

$F(x,y)$的函数值就是随机点落在如图所示区域内的概率.



(2) 分布函数的性质

1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数,即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$,

对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

2° $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的 y, $F(-\infty,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$,

对于任意固定的x, $F(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$,

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

3° $F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0),$

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

4° 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$

证明 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$$

$$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0.$

二、二维离散型随机变量

1. 定义

若二维随机变量 (X, Y) 所取的可能值是有限对或无限可列多对,则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为$(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$, 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

称此为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律，或随机变量 X和Y的联合分布律.

其中 $p_{ij} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例1 设随机变量 X 在1,2,3,4四个整数中等可能地取值,另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值.试求 (X,Y) 的分布律.

解 $\{X=i,Y=j\}$的取值情况是： $i=1,2,3,4,$

j取不大于i的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4, \quad j\le i.$$

于是 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例2 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里, 随机抽取两支, 若 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数,求 (X, Y) 的分布律.

解 (X, Y) 所取的可能值是

(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0).

$$P\{X=0, Y=0\} = \binom{3}{0}\cdot\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{2}\bigg/\binom{8}{2} = \frac{3}{28},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\bigg/\binom{8}{2} = \frac{3}{14},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{1}{28},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{9}{28},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}.$$

故所求分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

例3 一个袋中有三个球,依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中 , 再任取一个, 设每次取球时,各球被取到的可能性相等,以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字 , 求 (X, Y) 的分布律与分布函数.

解 (X, Y) 的可能取值为 (1,2), (2,1), (2,2).

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2, Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$p_{11}=0, \quad p_{12}=p_{21}=p_{22}=\frac{1}{3},$$

故 (X,Y) 的分布律为

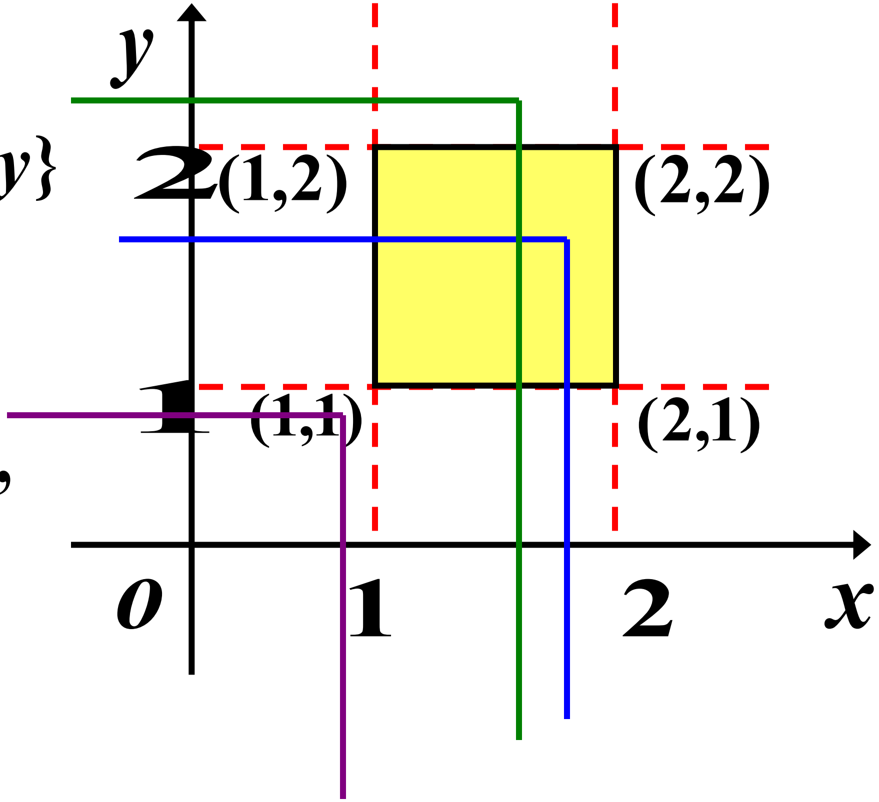
$Y \backslash X$	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

下面求分布函数.

(1)当 $x<1$ 或 $y<1$ 时,

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

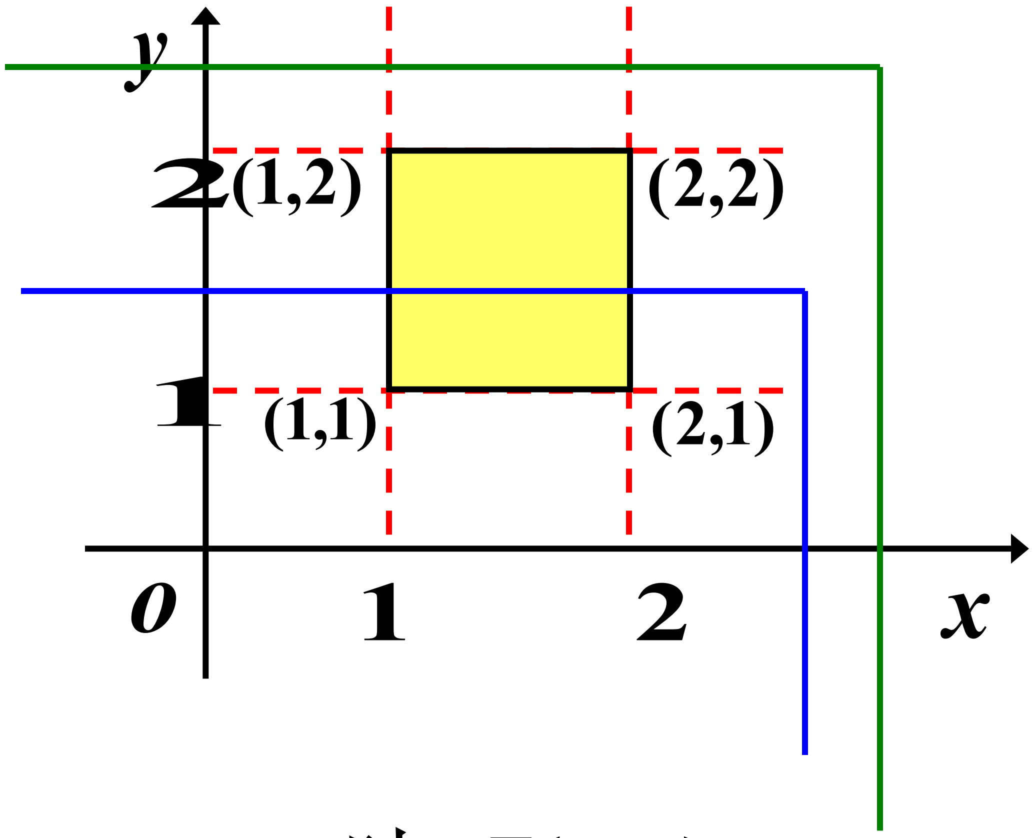
$=0;$



(2)当 $1\le x<2, 1\le y<2$ 时,

$F(x,y)=p_{11}=0;$

(3)当 $1\le x<2, y\ge 2$ 时, $F(x,y)=p_{11}+p_{12}=1/3;$



(4)当$x \geq 2, 1 \leq y < 2$时，$F(x,y) = p_{11} + p_{21} = 1/3$;

(5)当$x \geq 2, y \geq 2$时, $F(x,y) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1.$

所以(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1\text{或}y<1,\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<2,y\ge 2,\text{或}x\ge 2,1\le y<2,\\ 1, & x\ge 2,y\ge 2.\end{cases}$$

说明

离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数归纳为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i, j 求和.

三、二维连续型随机变量

1.定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负可积的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2.性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

(3) 设 G 是 xoy 平面上的一个区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4)若 $f(x,y)$在(x,y)连续,则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

3.说明

几何上，$z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 $f(x, y)$ 和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X, Y) \in G\}$ 的值等于以 G 为底，以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶面的柱体体积.

例4 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y\le X\}$.

解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

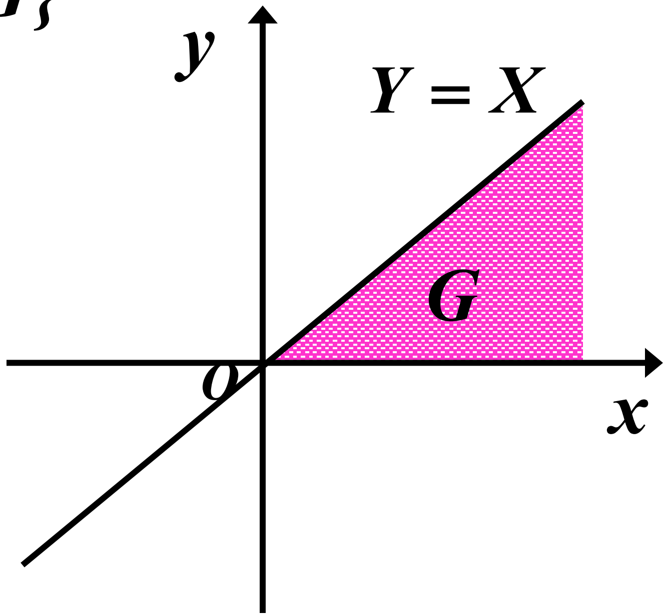
即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$



推广　n 维随机变量的概念

定义　设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数.

五、小结

1. 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}}p_{ij}.$$

3. 二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

第二节　边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘分布

四、小结

一、边缘分布函数

问题:已知 (X,Y) 的分布,如何确定 X,Y 的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\ F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y)关于X的边缘分布函数.

定义 设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的分布函数，

则 $$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}.$$

令 $y \to \infty$，称 $P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x,\infty)$

为随机变量 (X,Y) 关于X的边缘分布函数.

记为 $F_X(x) = F(x,\infty)$.

同理令 $x \to \infty$,

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y \le y\} = P\{Y \le y\}$$

为随机变量 (X,Y)关于Y的边缘分布函数.

二、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=P\{X=x_i\}, \quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}=P\{Y=y_j\}, \quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}$ $(i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}$ $(j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1,2,\cdots.$$

因此得离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

例1　已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **边缘分布**

例2　一整数 N 等可能地在$1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值.设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数，$F=F(N)$是能整除N的素数的个数.试写出D和F的联合分布律,并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D和 F 的联合分布律与边缘分布律：

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

三、连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

称其为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Y 的边缘概率密度.

例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

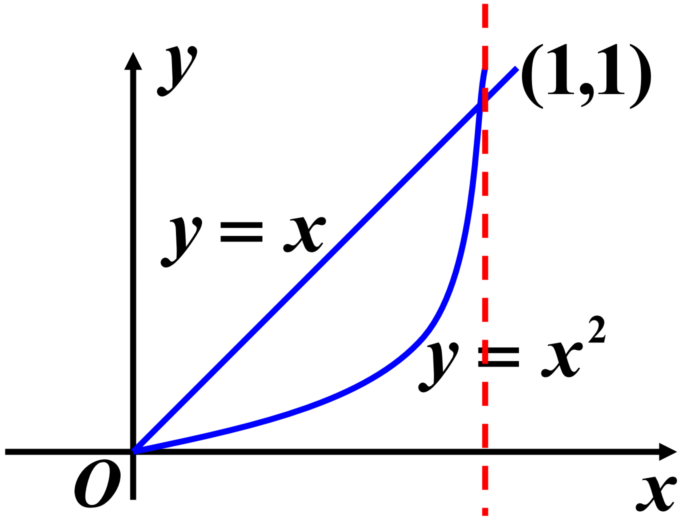
求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

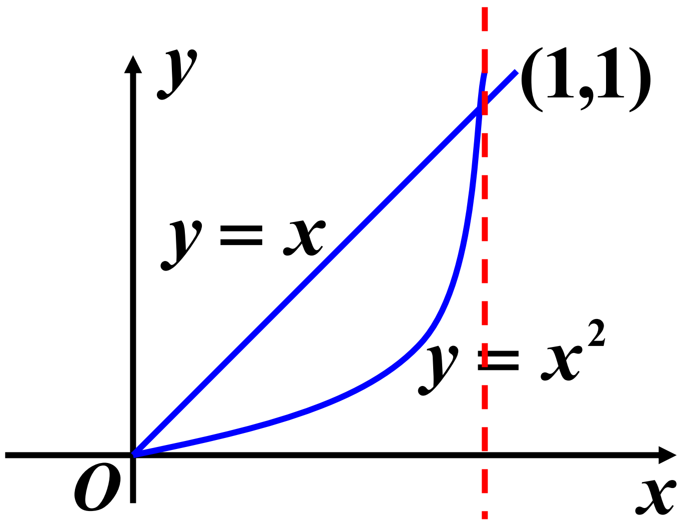
$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}\,y$$



$$= 6(x - x^2).$$

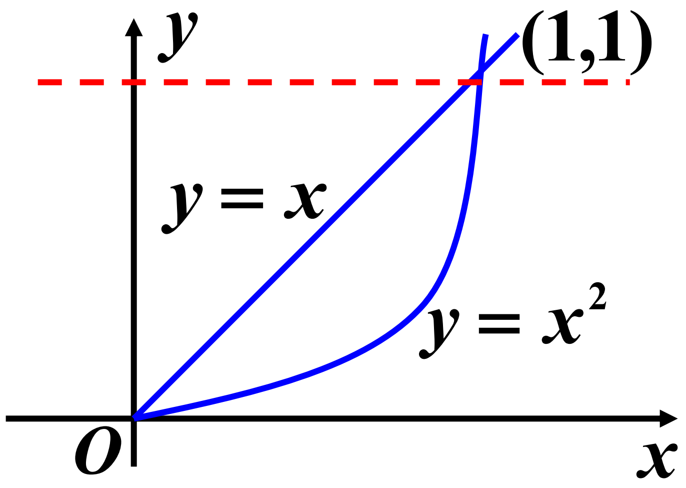
当 $x < 0$ 或 $x > 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$



因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当$0 \le y \le 1$时,



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$=6(\sqrt{y}-y).$$

当$y<0$或$y>1$时, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=0.$

得 $f_Y(y)=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$

$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$

由于 $\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho_0)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]}\mathrm{d}y,$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数ρ.

请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定.

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布,但是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

四、小结

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x\,.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y.$$

$$F_Y(x)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.$$

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **边缘分布**

第三节　　条件分布

一、离散型随机变量的条件分布

二、连续型随机变量的条件分布

三、小结

一、离散型随机变量的条件分布

问题

考虑一大群人,从其中随机挑选一个人,分别用 X 和 Y 记此人的体重和身高,则X 和 Y 都是随机变量,他们都有自己的分布.

现在如果限制 Y 取值从1.5m到1.6m,在这个限制下求 X的分布.

定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 j, 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量 X 的条件分布律.

对于固定的 i, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

为在$X=x_i$条件下随机变量 Y 的条件分布律.

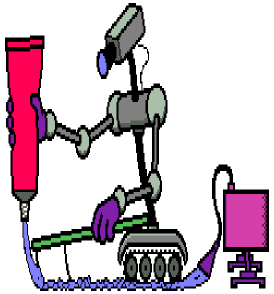
其中$i,j=1,2,\cdots$.

例1 在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的.其一是紧固 3 只螺栓,其二是焊接 2 处焊点.以 X 表示螺栓紧固得不良的数目,以 Y 表示焊点焊接得不良的数目.据积累的资料知 (X,Y) 具有分布律:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1) 求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.



解　由上述分布律的表格可得

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045},$$

$$P\{Y=2|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045},$$

即在 $X=1$ 的条件下,Y 的条件分布律为

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k \mid X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同理可得在 $Y=0$ 的条件下,X 的条件分布律为

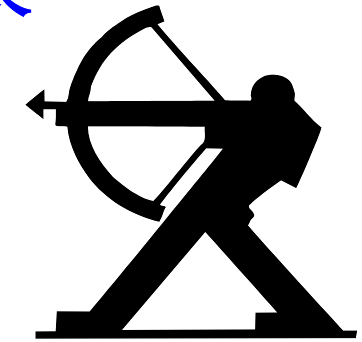
$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k \mid Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

例2 一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$,射击到击中目标两次为止.设以X表示首次击中目标所进行的射击次数,以Y表示总共进行的的射击次数.试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解 由题意知X取m且Y取n时,有

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{(n-2)\text{个}}$$

即得X和Y的联合分布律为



$$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},$$

其中$q=1-p,\quad n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1.$

现在求条件分布律.

$$P\{X=m|Y=n\},\quad P\{Y=n|X=m\},$$

由于 $$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}=\frac{p^2q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},$$

$$m=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\qquad n=2,3,\cdots.$$

所以当 $n=2,3,\cdots$ 时,

$$P\{X=m \mid Y=n\}=\frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},$$

当 $m=1,2,\cdots,n-1$ 时,

$$P\{Y=n \mid X=m\}=\frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2 q^{n-2}}{p\ q^{m-1}}=pq^{n-m-1},$$

$$n=m+1, m+2, \cdots.$$

二、连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$,(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$.若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度,记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x$ 为在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件分布函数,记为

$$P\{X \le x | Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x|y),$$

即 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x.$

同理定义在 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y | X = x\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}y.$$

请同学们思考

为什么不能用条件概率的定义来直接定义条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$?

答 条件分布是指在一个随机变量取某个确定值的条件下,另一个随机变量的分布，即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x|Y = y\}.$$

由于$P\{Y = y\}$可能为零(连续型时一定为零).故直接用条件概率来定义时,会出现分母为零.

因此，不能直接用条件概率公式引入“条件分布函数”。

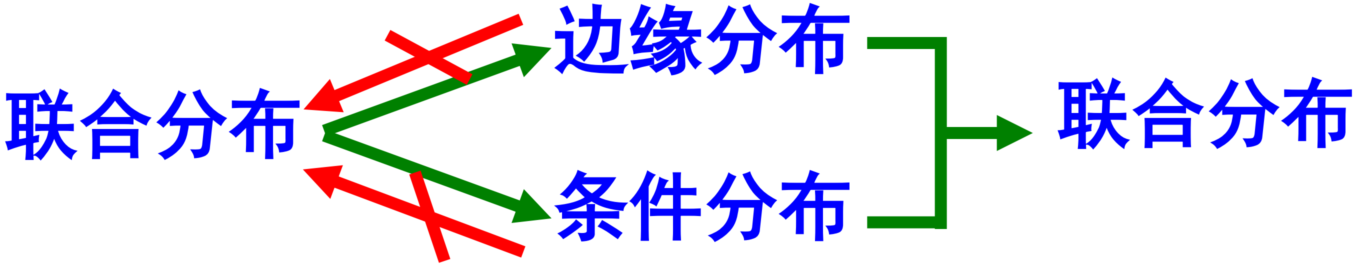
条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



例3 设 G 是平面上的有界区域,其面积为 A. 若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由题意知随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

又知边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是当 $-1<y<1$ 时,有

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时,数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机地取值.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$, 在$X=x$的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

三、小结

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，$p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$ 为其联合分布律,在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots$.

2. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量,则有

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{x} [f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{y} [f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

第四节　相互独立的随机变量

一、随机变量的相互独立性

二、二维随机变量的推广

三、小结

一、随机变量的相互独立性

1.定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$,边缘概率密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

(3) X 和 Y 相互独立, 则

$f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

例1 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

解 将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1)由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \dfrac{2}{3}+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是：$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$, 得 $\beta = \frac{1}{9}$.

例2 设随机变量 X 和 Y 相互独立,并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$,Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布,求 (X,Y) 的联合概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,

所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<\infty$;

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$f(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时，$f(x,y)=0.$

例3 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X, Y) 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立，所以

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}.$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = P\{X = 1\}P\{Y = 2\} = 0.3 \times 0.6 = 0.18,$$

$$P\{X = 1, Y = 4\} = P\{X = 1\}P\{Y = 4\} = 0.3 \times 0.4 = 0.12,$$

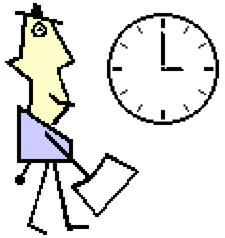
$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=0.7\times0.6=0.42,$$

$$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times0.4=0.28.$$

因此 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例4 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时,设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.



解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间, 由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其它},\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<x<9,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立, 得 (X,Y) 的概率密度为

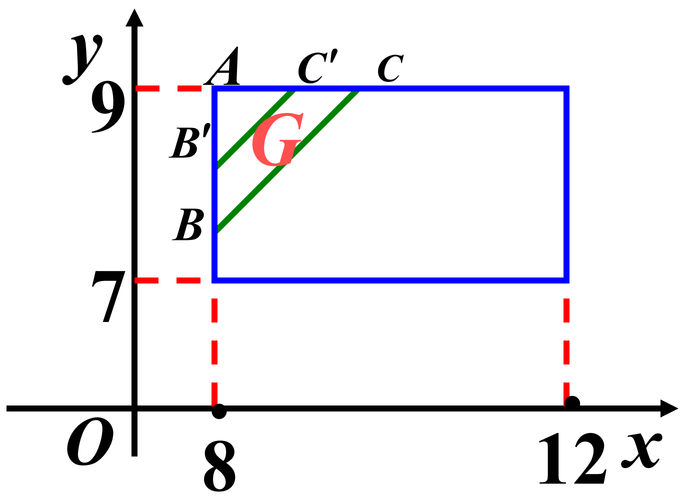
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1/8, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le 1/12\}$$

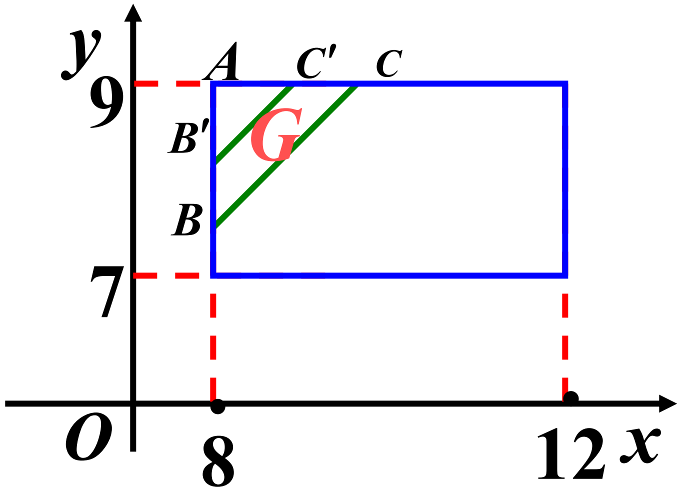
$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积}).$$



而　G的面积$=\Delta ABC$的面积$-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$



于是　$P\{|X-Y|\le 1/12\}$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积})=\frac{1}{48}.$$

因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为$\frac{1}{48}$.

二、二维随机变量的推广

1.分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 使对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数.

3.边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\infty,\cdots,\infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数.**

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\infty,\cdots,\infty)$$

称为n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$关于(X_1,X_2)的**边缘分布函数.**

其它依次类推.

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度, 则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1,关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的 $k(1\le k<n)$ 维边缘概率密度.

5. 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中F_1, F_2, F依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$,$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数,则称随机变量$(X_1, \cdots, X_m)$与$(Y_1, \cdots, Y_n)$相互独立.

6.重要结论

定理　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立,则$X_i(1,2,\cdots,m)$和$Y_j(j=1,2,\cdots,n)$相互独立.又若 h,g是连续函数,则 $h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立.

三、小结

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

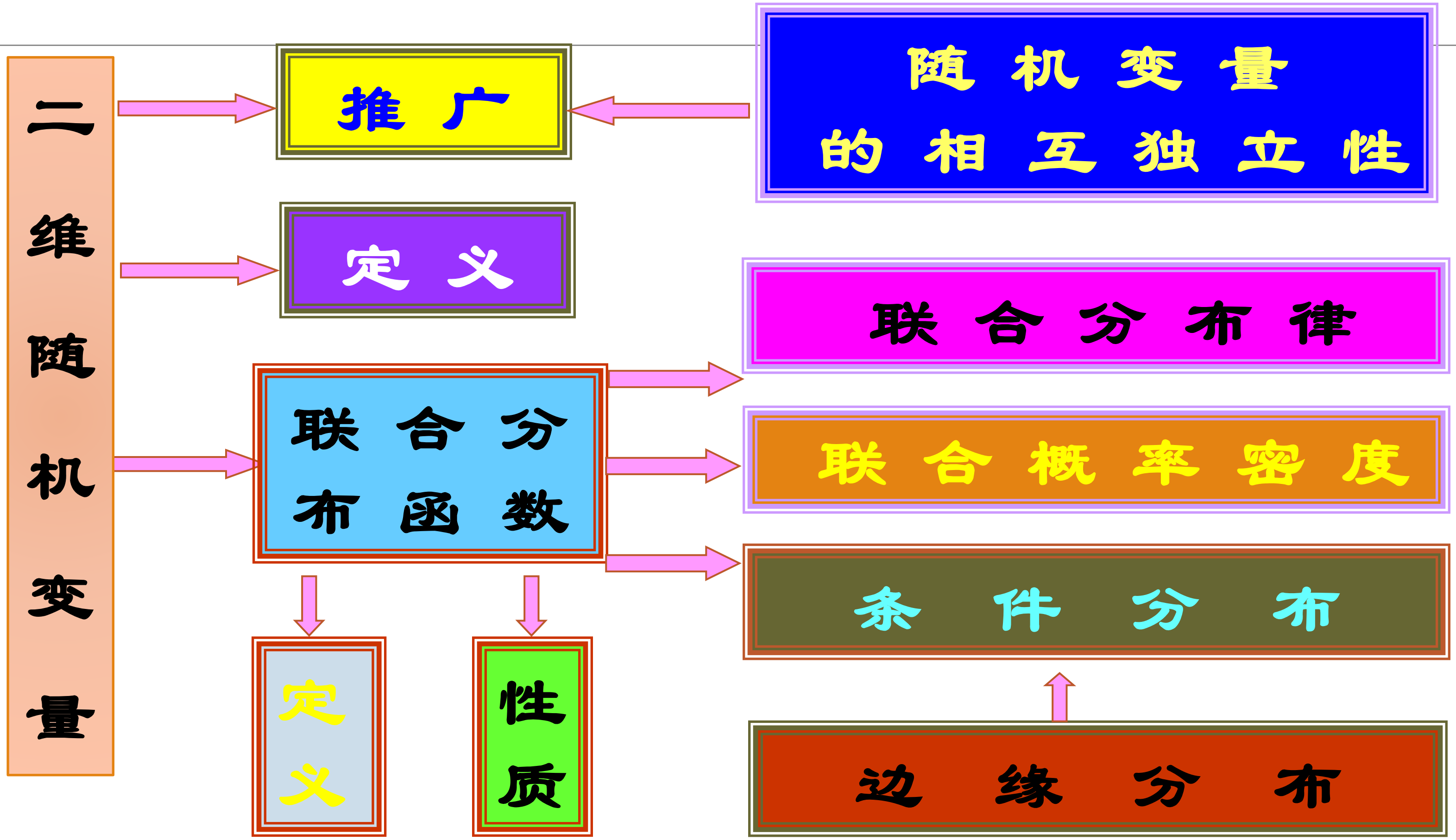
$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

总结



练习

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 确定常数 k;

(2) 求 $P\{X<1,\ Y<3\}$;

(3) 求 $P\{X<1.5\}$;

(4) 求 $P\{X+Y\leq 4\}$。

(1) 确定常数 k。 由归一化条件

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\,dy\,dx = 1,$$

计算得

$$\int_0^2\int_2^4 (6-x-y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[(6-x)y - \tfrac{y^2}{2}\right]_{y=2}^4 dx = \int_0^2 8\,dx = 16.$$

故 $k \cdot 16 = 2$ 的计算应校正为：更细致地做双重积分

$$\int_0^2\int_2^4 (6-x-y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[(6-x)y - \tfrac{y^2}{2}\right]_2^4 dx = \int_0^2 (8)\,dx = 16,$$

但要注意上一步我们把 k 一起带入：整体为 $k \times 16 = 1$，因此

$$k = \frac{1}{16} \times \frac{16}{2} \text{ 的表述仍需统一。}$$

为避免歧义，我们直接按代数积分：

$$\int_2^4 (6-x-y)\,dy = \left[(6-x)y - \tfrac{y^2}{2}\right]_2^4 = (6-x)\cdot 4 - \tfrac{16}{2} - \left((6-x)\cdot 2 - \tfrac{4}{2}\right) = 4.$$

再对 $x \in (0,2)$ 积分：$\int_0^2 4\,dx = 8$。所以

$$k \cdot 8 = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{8}.$$

(2) 求 $P\{X<1,\ Y<3\}$。　该事件在给定区域内对应 $0<x<1,\ 2<y<3$，故

$$P\{X<1,\ Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\,dx=\frac{3}{8}.$$

(3) 求 $P\{X<1.5\}$。　对 x 在 $(0,1.5)$、y 在 $(2,4)$:

$$P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\,dx=\frac{27}{32}.$$

(4) 求 $P\{X+Y\leq 4\}$。　在给定支持集内, $X+Y\leq 4$ 等价于 $0<x<2$ 且 $2<y\leq 4-x$（因 $y\geq 2$），于是

$$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\,dx=\frac{2}{3}.$$

答案汇总：

$$k = \frac{1}{8}, \qquad P\{X < 1,\ Y < 3\} = \frac{3}{8}, \qquad P\{X < 1.5\} = \frac{27}{32}, \qquad P\{X + Y \le 4\} = \frac{2}{3}.$$