《概率论与数理统计》第七周要点

第三章多维随机变量及其分布——复习要点

1. 二维随机变量的概念

- 在某些随机试验中，需要用两个或多个随机变量共同描述结果。
- 若 $X = X(e), Y = Y(e)$ 定义在同一试验样本空间 S 上，则称

$$(X, Y)$$

为一个 **二维随机变量**（或二维随机向量）。

- 例如：儿童的 (身高,体重)、炮弹的 (横坐标,纵坐标) 等。

—

2. 联合分布函数

- 定义：

$$F(x, y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}.$$

- 几何意义：$F(x, y)$ 表示随机点 (X, Y) 落在以 (x, y) 为右上角、位于其左下方的无穷矩形内的概率。
- 对任意 $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2$：

$$P\{x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

基本性质

1. $F(x, y)$ 关于 x 和 y 单调不减；
2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$；
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$；
4. $F(x, y)$ 关于 x、y 都右连续；
5. 概率非负性：对任意 $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2$，上式结果 ≥ 0。

—

3. 二维离散型随机变量与联合分布律

- 若 (X,Y) 仅能取有限或可列值对 (x_i,y_j)，定义

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}.$$

- 满足

$$p_{ij}\geq 0,\quad \sum_i\sum_j p_{ij}=1.$$

- 称 p_{ij} 为 (X,Y) 的 **联合分布律**。
- 可用表格表示：行对应 X 取值，列对应 Y 取值。
- 联合分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leq x}\sum_{y_j\leq y}p_{ij}.$$

例　若 X 在 $\{1,2,3,4\}$ 上等可能，给定 $X=i$ 时 Y 在 $\{1,2,\ldots,i\}$ 上等可能，则

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{4i},\quad j=1,\ldots,i.$$

—

4. 二维连续型随机变量与联合概率密度

- 若存在非负可积函数 $f(x,y)$，使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dv\,du,$$

则称 (X,Y) 为 **二维连续型随机变量**，$f(x,y)$ 为联合概率密度。

- 性质：

1. $f(x,y)\geq 0$；
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$；
3. 对任意区域 G：
$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy;$$
4. 若 $f(x,y)$ 连续，则
$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y).$$

例

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+3y)}, & x>0,\, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,\, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

并且 $P\{Y<X\}=\iint_{y<x} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}$。

—

5. 边缘分布（Marginal Distribution）

- 二维随机变量的各分量 X,Y 本身也是随机变量。
- **边缘分布函数**：
$$F_X(x)=F(x,+\infty),\quad F_Y(y)=F(+\infty,y).$$
- **边缘分布律（离散型）**：
$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j}^{\infty}p_{ij},\qquad p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i}^{\infty}p_{ij}.$$
- **边缘密度（连续型）**：
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx.$$

例：二维正态分布的边缘密度　若

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right],$$

则

$$f_X(x)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad f_Y(y)\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

说明：联合分布确定边缘分布，但边缘分布不能唯一确定联合分布。

—

6. 要点小结

- (X,Y) 的联合分布可由分布函数 $F(x,y)$ 或联合密度 $f(x,y)$ 描述；
- **边缘分布**：联合分布对另一变量积分（或求和）得到；
- 联合分布确定边缘与条件，反之不一定成立；
- 概率几何意义：$f(x,y)$ 为空间曲面下的体积密度。